

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Донецький національний технічний університет

Кафедра "Вища математика"

**Збірник науково-методичних робіт**

Випуск 7

Донецьк -2011

УДК 5:371.214.114, 621.923, 517.95(09), 531.18, 915.77.54, 531.38, 517.9,  
517, 518, 531, 517.8, 539.5, 517.926.

Рекомендовано до друку Радою Донецького Національного технічного  
університету  
Протокол № 5 від 20.05.2011 р.

**Збірник науково-методичних робіт.** - Вип. 7. - Донецьк: ДонНТУ, 2011. –353 с.

В збірнику представлено деякі проблеми та аспекти викладання вищої математики у технічному вузі, також різні напрямки застосування математичних методів до розв'язання інженерних задач, а саме, задач механіки твердого тіла, фізики магнітних явищ, статистичної фізики та інших.

Науково-методичні роботи є узагальненням досвіду викладачів кафедри по удосконалюванню математичної підготовки спеціалістів.

Видання розраховано на широке коло наукових робітників, а також аспірантів та студентів старших курсів технічних університетів.

**Редакційна колегія:** проф. Улітін Г.М. - редактор, проф. Петренко О.Д., проф. Лесіна М.Ю, проф. Косолапов Ю.Ф., проф. Скафа О.І., доц. Евсеева О.Г. ,  
ст. викл. Локтионов И.К.

Адреса редакційної колегії : Україна, 83050, м. Донецьк, вул. Артема, 96,  
ДонНТУ, 3-й учбовий корпус, кафедра "Вища математика", тел. (062) 3010901.

© Донецький Національний технічний університет, 2011 р.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕЦИФИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ СКОЛЬЖЕНИЯ ВИНТОВЫХ ДИСЛОКАЦИЙ В ПРИМЕСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

**Малашенко В.В.***Донецкий национальный технический университет*

*Досліджено динамічне гальмування гвинтової дислокації точковими дефектами з урахуванням збудження поперечних коливальних елементів дислокації як у площині ковзання, так і в перпендикулярній їй площині. Показано, що облік коливальних елементів у площині перпендикулярній площині ковзання не змінює залежності сили гальмування від швидкості ковзання і концентрації дефектів, проте значно збільшує величину цієї сили, зокрема, у випадку ізотропної моделі сила гальмування зростає в два рази.*

Точечные дефекты (примеси, вакансии, междоузельные атомы) способны оказывать существенное влияние на движение дислокаций в динамической области, т.е. в той области скоростей, в которой кинетическая энергия дислокации превосходит энергию ее взаимодействия с точечными дефектами [1]. В работах [2-8] исследовалась сила динамического торможения дислокаций точечными дефектами, возникающая в результате необратимого перехода кинетической энергии поступательного движения дислокации в энергию поперечных колебаний ее элементов в плоскости скольжения. Оказалось, что этот механизм диссипации приводит к различному динамическому поведению винтовых и краевых дислокаций. В частности, в работе [5] было показано, что в области независимых столкновений сила торможения винтовой дислокации  $F_{SCR}$  линейно зависит от скорости дислокационного скольжения  $v$ , в то время, как сила торможения краевой  $F_{ED}$  обратно пропорциональна этой скорости, и, кроме того, выполняется соотношение

$$\frac{F_{SCR}}{F_{ED}} = \frac{v^2}{c^2},$$

где  $c$  - скорость распространения поперечных звуковых волн.

Но винтовая дислокация, в отличие от краевой, способна совершать колебания в плоскости, перпендикулярной плоскости скольжения и даже совершать двойное поперечное скольжение [1,9]. Движение винтовой дислокации, совершающей двойное поперечное скольжение, нельзя описать динамическими уравнениями типа тех, которые использовались в работах [3-8]. Однако существуют системы скольжения, допускающие малые поперечные колебания элементов винтовой дислокации перпендикулярно плоскости скольжения под влиянием упругих полей

точечных дефектов, однако исключают поперечное скольжение винтовых дислокаций. Такая ситуация реализуется, например, в цинке для дислокаций, ориентированных вдоль  $\langle 11\bar{2}0 \rangle$ , а при низких температурах и в натрии для системы скольжения  $\langle 111 \rangle \{112\}$ . Системы такого типа и являются объектом исследования настоящей работы.

Пусть винтовая дислокация параллельная оси  $OZ$  с вектором Бюргерса  $(0,0,b)$  под действием постоянного внешнего напряжения  $\sigma_0$  движется в положительном направлении оси  $OX$  с постоянной скоростью  $V$  в плоскости  $y=0$  в поле хаотически распределенных дефектов. Т.к. элементы дислокации способны совершать колебания относительно невозмущенной линии дислокации и в плоскости  $y=0$ , и в плоскости  $X=vt$ , движение дислокационного элемента может быть описано системой двух скалярных уравнений

$$m \left\{ \frac{\partial^2 X(z,t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial X(z,t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 X(z,t)}{\partial z^2} \right\} = b \left[ \sigma_0 + \sigma_{yz}^d \right] \quad (1)$$

$$m \left\{ \frac{\partial^2 w_y(z,t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w_y(z,t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 w_y(z,t)}{\partial z^2} \right\} = b \left[ \sigma_0 + \sigma_{xz}^d \right] \quad (2)$$

где  $m$  – масса единицы длины дислокации, величина коэффициента  $\beta$  определяется выражением  $\beta = B/m$ , где  $B$  – коэффициент динамического торможения дислокации, обусловленного фоннными, магнонными или электронными механизмами диссипации. Величина  $X(z,t)$  определяет положение дислокационного элемента в плоскости скольжения

$$X(z,t) = vt + w_x(z,t) \quad (3)$$

где функция  $w_x(z,t)$  – случайная величина, описывающая поперечные колебания элемента дислокации в плоскости скольжения, ее среднее значение по хаотическому распределению дефектов и по длине дислокации равно нулю. Это усреднение в дальнейшем будет обозначаться символом  $\langle \dots \rangle$ . Если перейти в систему координат, связанную с центром масс дислокации, получим дифференциальное уравнение для определения  $w_x(z,t)$

$$m \left\{ \frac{\partial^2 w_x(z,t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w_x(z,t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 w_x(z,t)}{\partial z^2} \right\} = b \left[ \sigma_0 + \sigma_{yz}^d \right] \quad (4)$$

Поскольку поставленная задача решается в рамках изотропной модели, все коэффициенты левой части уравнения (4) совпадают с коэффициентами левой части уравнения (2) для функции  $w_y(z, t)$ , описывающей колебания элементов дислокации в плоскости перпендикулярной плоскости скольжения, при этом  $\langle w_y(z, t) \rangle = 0$ . В правых же частях этих уравнений стоят различные компоненты тензора напряжений, создаваемых дефектами на линии дислокации, а именно: в уравнении (2) – компонента  $\sigma_{xz} = \sum_{i=1}^N \sigma_{xz,i}$ , ( $N$  – число дефектов в кристалле,  $\sigma_{xz,i}$  – компонента тензора напряжений, создаваемых  $i$ -м дефектом), в уравнении (4) – компонента  $\sigma_{yz} = \sum_{m=1}^N \sigma_{yz,m}$ . Как и в работах [3-8], константа  $\beta$  обеспечивает сходимость интегралов, возникающих в процессе вычислений, однако ее влиянием на величину силы торможения мы пренебрегаем в меру малости параметра  $\alpha = \beta b v / c^2$ .

Считая колебания дислокационных элементов малыми, во втором порядке теории возмущений получаем

$$F_d = b \left\langle \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} w_x \right\rangle + b \left\langle \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} w_y \right\rangle \quad (5)$$

Вычисления удобно производить в импульсном пространстве, в котором

$$\begin{aligned} w_x(q, \omega) &= G(q, \omega) \sigma_{yz}(q, \omega); \\ w_y(q, \omega) &= G(q, \omega) \sigma_{xz}(q, \omega) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $G(q, \omega)$  – Фурье-образ функции Грина уравнений (2) и (4) (вследствие изотропности используемой модели функции Грина этих уравнений одинаковы). Как и в работах [3-5], точечные дефекты будем считать центрами дилатации. Необходимые нам компоненты тензоров напряжений имеют вид

$$\sigma_{yz} = \mu R^3 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{1}{r}; \quad \sigma_{xz} = \mu R^3 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r}. \quad (7)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига,  $\varepsilon$  – параметр несоответствия дефекта,  $R$  – его радиус.

Первое слагаемое в выражении (5) представляет собой силу торможения винтовой дислокации, обусловленную возбуждением дислокационных колебаний в плоскости скольжения. Воспользовавшись результатами работы [5], его можно представить в виде

$$F_1 = \frac{nb^2}{4\pi^2 m} \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \int_0^{\infty} dq_x q_x \left| \sigma_{yz}(q) \right|^2 \delta \left[ q_x^2 v^2 - c^2 q_z^2 \right] \quad (8)$$

где  $\delta \left[ q_x^2 v^2 - c^2 q_z^2 \right]$  - дельта-функция Дирака,  $n$  - объемная концентрация точечных дефектов. Фурье-образы необходимых нам компонент тензора деформаций имеют вид

$$\sigma_{yz}(q) = \mu R^3 \varepsilon \frac{q_y q_z}{q^2}; \quad \sigma_{xz}(q) = \mu R^3 \varepsilon \frac{q_x q_z}{q^2} \quad (9)$$

Следовательно, выражение для силы торможения дислокации дефектами типа центра дилатации можно представить в виде

$$F_1 = \frac{nb^2 \mu^2 R^6 \varepsilon^2}{4\pi^2 m} \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \int_0^{\infty} dq_x q_x \frac{q_y^2 q_z^2}{q^4} \delta \left[ q_x^2 v^2 - c^2 q_z^2 \right] \quad (10)$$

Этот интеграл расходится на верхнем пределе. Для устранения такой расходимости обычно применяется стандартная процедура обрезания верхнего предела интегрирования величиной порядка  $R^{-1}$ . Выполняя вычисления и используя явное выражение для массы дислокации [1], получим окончательное выражение для силы торможения, обусловленной колебаниями дислокации в плоскости скольжения, согласующееся с результатами работы [5]

$$F_1 = n_0 \varepsilon^2 \mu b \frac{v}{c} \quad (11)$$

Здесь  $n_0 = nR^3$  - безразмерная концентрация дефектов. Рассмотрим теперь второе слагаемое в выражении (5). Оно определяет силу торможения дислокации, возникающую благодаря колебаниям элементов дислокации в плоскости перпендикулярной плоскости скольжения. Выполняя вычисления, аналогичные проделанным ранее, получим выражение для этого слагаемого в виде

$$F_2 = \frac{nb^2}{8\pi^2 m} \int_{-\infty}^{\infty} dq_y \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \int_{-\infty}^{\infty} dq_x q_y \sigma_{yz}(q) \sigma_{xz}(-q) \delta \left[ q_x^2 v^2 - c^2 q_z^2 \right] \quad (12)$$

Заметим, что для центра дилатации  $\sigma_{ik}(-q) = \sigma_{ik}(q)$ . Подставляя в (12) Фурье-образы необходимых компонент тензора деформаций (9), получим окончательное выражение для  $F_2$ , в точности совпадающее с выражением (10) для  $F_1$ . Таким образом, в изотропном случае возбуждение дислокационных колебаний как в плоскости скольжения, так и в перпендикулярной ей плоскости дают в точности

одинаковый вклад в силу торможения винтовой дислокации, а полная сила торможения, определяемая данным механизмом диссипации, равна

$$F = F_1 + F_2 = 2n_0\varepsilon^2\mu b\frac{v}{c} \quad (13)$$

Следовательно, учет дислокационных колебаний в плоскости перпендикулярной плоскости скольжения приводит к тому, что сила торможения винтовой дислокации, обусловленная данным механизмом диссипации, возрастает по величине в два раза, а ее зависимость от скорости скольжения дислокации и концентрации точечных дефектов остается прежней. Данный результат получен для дефектов типа центра дилатации. Однако нетрудно убедиться, что он справедлив для всех дефектов, тензор деформации которых может быть представлен в следующем виде

$$\sigma_{ik} = \eta \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} f(r) \quad (14)$$

Здесь  $f(r)$  - произвольная функция расстояния от точечного дефекта до исследуемой точки,  $\eta$  - коэффициент, зависящий от упругих модулей кристалла и мощности дефекта. В этом случае также имеет место равенство  $F_1 = F_2$ , т.е. сила торможения также возрастает в два раза и будет пропорциональна концентрации точечных дефектов и скорости скольжения дислокации, однако коэффициент пропорциональности будет, естественно, другим. Такая же зависимость от концентрации и скорости должна сохраниться для исследуемых дефектов и в анизотропном случае, однако равенство  $F_1 = F_2$  выполняться не будет и численный коэффициент в формуле (13) будет зависеть от соотношения значений соответствующих модулей упругости.

Учет исследованных особенностей динамического поведения винтовых дислокаций особенно важен при низких температурах и высоких концентрациях примеси.

#### *Литература*

1. Альшиц В.И., Инденбом В.Л. Динамическое торможение дислокаций // УФН. – 1975. – Т. 115, № 1. – С. 3–39.
2. Natsik V.D., Chishko K.A. Crystal Res. and Technol. **19**, 6, 763(1984).
3. Malashenko V.V., Sobolev V.L., Khudik B.I. Dynamical Deceleration of a Dislocation by Surface Defects // Phys. Stat. Sol. (b). – 1987. – Vol. 144, № 2. – P. 463–470.
4. Малашенко В.В., Соболев В.Л., Худик Б.И. Спектр колебаний и динамическое торможение дислокаций в кристаллах с дефектами // ФТТ. – 1987. – Т. 29, № 5. – С. 1614–1616.

5. Малашенко В. В. Динамическое торможение винтовой дислокации точечными дефектами // ФТТ. – 1990. – Т. 32, № 2. – С. 645–647.
6. Малашенко В. В. Коллективное взаимодействие точечных дефектов с движущейся винтовой дислокацией // ФТТ. – 1997. – Т. 39, № 3. – С. 493– 494.
7. Малашенко В. В. Динамическое торможение краевых дислокаций точечными дефектами в гидростатически сжатом кристалле // ЖТФ. – 2006. – Т. 76, № 6. – С. 127–129.
8. Малашенко В. В. Влияние фононной вязкости и дислокационного взаимодействия на скольжение пары краевых дислокаций в кристалле с точечными дефектами // ФТТ. – 2006. – Т. 48, № 3. – С. 433–435.
9. Р.П. Житару, Н.А. Палистрант. ФТТ **41**, 6, 1041(1999).

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Улитин Г.М., Лесина М.Е., Косолапов Ю.Ф. История кафедры высшей математики им. В.В.Пака .....	3
2. Азарова Н.В., Азарова А.Э. Применение симплексного метода для решения оптимизационных задач строительства и архитектуры .....	13
3. Азарова Н.В., Маленко А.Н. Применение непараметрической статистики к исследованию рабочей поверхности шлифовального круга .....	18
4. Азарова Н.В., Маленко Андреас. Применение методов линейного программирования для оптимизации севооборотов.....	24
5. Азарова Н.В., Муравская А.В. Применение дифференциального и интегрального исчисления к решению задач электротехники.....	29
6. Александрова О. В. Применение группового анализа к вычислению первых интегралов стохастических систем .....	34
7. Алексеева І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. Досвід створення і використання навчально-методичних комплексів з вищої математики.....	40
8. Берьозкіна І. А. Шляхи удосконалення математичної підготовки майбутніх студентів технічних спеціальностей .....	46
9. Буркина Н.В. Реализация межпредметных связей как важный фактор повышения эффективности обучения математике студентов .....	53
10. Власенко К. В. Характеристика складових навчально-методичного комплексу з вищої математики для майбутніх інженерів .....	60
11. Гененко Ю.А., Лупаску Д. К. Математическое моделирование деградации в сегнетоэлектриках по механизму дрейфа заряженных дефектов в локальных деполяризационных полях .....	66
12. Герасимчук В.С. Професійно спрямоване викладання математики та	



методи його реалізації .....	72
13. Гребьонкіна О. С. Ділова гра як форма активного навчання .....	77
14. Гусак Л.П. Формування навичок самостійної роботи студентів в процесі вивчення вищої математики .....	84
15. Данильчук О.М. Самостійна робота студентів як умова їх професійного становлення .....	89
16. Дем'яненко А.Г. Стан, проблеми, деякі концепції та заходи підвищення якості інженерної освіти в Україні .....	93
17. Дремов В.В., Минакова О.А. Аналитический расчет нестационарных температур в жидкой и твердой фазах металла с определением скорости движения фронта затвердевания .....	99
18. Євсєєва О.Г. Поетапне освоєння предметних дій при навчанні математики у ВТНЗ .....	107
19. Євсєєва О.Г., Прокопенко Н.А. Знання та вміння з векторної алгебри, необхідні для розв'язання задач з аналітичної геометрії у просторі.....	114
20. Емельянова Т. В., Ярхо Т.А., Полтавская О.С., Гавриш И.П. Высшая математика в примерах и задачах для инженеров-экологов. Системы дифференциальных уравнений .....	121
21. Ехилевский С.Г., Гурьева Н.А., Голубева О.В. Группы и подгруппы в курсе геометрии и алгебры .....	129
22. Косолапов Ю.Ф. К практике условного экстремума .....	141
23. Косолапов Ю.Ф., Шупанова Е. К методике условного экстремума .....	134
24. Кухарева О.С. Програма-тест для перевірки знань учнів з початків аналізу в старшій школі в умовах модульного навчання .....	148
25. Лаврик І. В., Фортуна В. В. Дослідження залежності ціни за квадратний метр квартир міста Донецька від центру .....	155
26. Лебедева И.А., Гуржий Д. Доказательство числовых неравенств с помощью классических неравенств.....	160
27. Лебедева И.А., Рубцова О.А. Особенности преподавания курса высшей математики студентам технических специальностей .....	164
28. Левін В.М. Математичні спецкурси у інженерній освіті .....	170
29. Лесина М.Е, Зиновьева Я.В. Уравнения годографов в опорном базисе для задачи о движении по инерции системы двух гироскопов Лагранжа .....	179
30. Локтионов И.К., Гусар Г.А., Шевченко Т.С. Применение трёхпараметрического потенциала взаимодействия в статистической модели жидкого состояния .....	195

31. Локтионов И.К., Шевченко Т.С. Статистическая модель металлической жидкости с двухпараметрическими осциллирующими потенциалами взаимодействия .....	206
32. Лукашук Т.І., Москаленко А.С., Проценко Б.В. Особливості математичної підготовки випускників технікумів у вищих навчальних закладах.....	214
33. Маевская С.И., Журба В.В., Абдулин Р.Н. Сопровождающий трёхгранник локсодромы кругового цилиндра (винтовой линии) .....	223
34. Малащенко В.В. Использование теории возмущений для исследования специфических особенностей скольжения винтовых дислокаций в примесных кристаллах.....	227
35. Малащенко В.В., Малащенко Т.И. Математическое моделирование процессов дислокационной динамики в наноматериалах и тонких пленках.....	233
36. Малащенко В.В., Малащенко Т.И. Применение метода функций Грина при анализе динамического взаимодействия краевых дислокаций с дислокационными петлями .....	238
37. Мартиненко М.А., Мартиненко В.П., Ткачук А.М. Роль фундаментальних наук в сучасній інженерній освіті України.....	242
38. Мироненко Л.П., Кайда С.В. Теорема умножения определителей и правило Крамера .....	247
39. Мироненко Л.П., Рубцова О.А., Бреус С. Единый подход к методу обратной матрицы и правилу Крамера.....	251
40. Николайчук Т.И., Улицкая Н.Ю. Методические аспекты изучения темы «Неопределенный интеграл» в техническом ВУЗ.....	255
41. Николайчук Т. И., Улицкая Н.Ю., Ларина А. Использование математических моделей в биологических исследованиях .....	261
42. Паниотов Ю.Н. Приложение операционного исчисления в математической физике .....	267
43. Пелашенко А.В. Решение задач управления запасами при случайном спросе.....	271
44. Перегуда Ю. М. Організація контролю результатів навчальної діяльності студентів в умовах кредитно-модульної системи навчання .....	275
45. Перетолчина Г. Б., Глянцев П. Пример реализации профессиональной направленности курса «Теории вероятностей и математическая статистика».....	281
46. Петренко А.Д., Петренко Е.А. Экономико-математическая модель ценовой конкуренции монополий .....	287
47. Петренко А.Д., Петренко Е.А. Компетентностный подход в подготовке квалифицированных специалистов.....	294

48. Пуханова Л.С. Сучасні підходи до вдосконалення системи педагогічного контролю .....	298
49. Румянцев Н.В. Проблемы повышения качества преподавания математики для современного инженера .....	304
50. Торбіна Т.В. Взаємоз'язок спеціальних і математичних дисциплін в професійній підготовці фахівців електротехнічних систем.....	308
51. Улитин Г.М. Некоторые приёмы приведения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами к известным уравнениям .....	314
52. Улитин Г.М., Савин А.И. Опыт проведения вузовских олимпиад по высшей математике в ДонНТУ .....	319

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

1. Абдулин Р.Н. Об одном примере стабилизации движения неголономной системы .....	324
2. Александрова О. В., Гордеев Г. Г., Ковалев И. Н. Моделирование движения системы связанных твердых тел – носителя и носимого тела .....	326
3. Александрова О. В., Ковалев И.Н. О методике организации самостоятельно работы студентов на занятиях по высшей математике .....	327
4. Вилкова И.В. Формула Ньютона-Лейбница и одно из условий ее применимости .....	329
5. Гончаров А.Н. О применении рядов в теории вероятностей .....	331
6. Гордеев Г.Г. Алгоритмы решения диофантовых уравнений и упаковка индексов степеней полиномов .....	334
7. Дегтярев В.С. О применении передаточной функции при решении линейных дифференциальных уравнений операционным способом .....	335
8. Кононыхин Г.А. Об условия существования прецессионных движений в задачах динамики твердых тел .....	337
9. Мироненко Л.П., Улитин Г.М. Формула Эйлера и некоторые следствия из неё .....	339
10. Паниотов Ю.Н., Перетолчина Г.Б. К изложению темы выпуклость и вогнутость кривой.....	341
11. Руссиян С.А. Математическая модель одного из известных случаев в истории .....	343
12. Чудина Е.Ю., Деханова В.В. Игры с точки зрения теории вероятностей. .	346
13. V. Kochergin, L. Neely, I.N. Krivorotov, E.V. Kochergin, K.L. Wang Плазмонное усиление сверхбыстрого оптического перемагничивания .....	348