

$$\Delta_2 = x'(\Delta t) \cdot \Delta t ;$$

а выходной процесс

$$y(t) \approx x_0 \cdot h(t_0) + x'(0) \cdot h(t_1) \Delta t + x'(\Delta t) \cdot h(t_2) \Delta t + \dots$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ сумма переходит в интеграл, который называется интегралом Дюамеля. А переходный процесс на выходе звена (системы), т.е. реакция, определяется:

$$y(t) = x_0 h(t) + \int_0^t h(t - \tau) \cdot x'(\tau) d\tau ,$$

где интегрирование ведется по $\tau = i \Delta t$, а t – величина постоянная.

Можно записать это же выражение иначе:

$$y(t) = x_0 h(t) + \int_0^t \omega(t - \tau) \cdot x(\tau) d\tau .$$

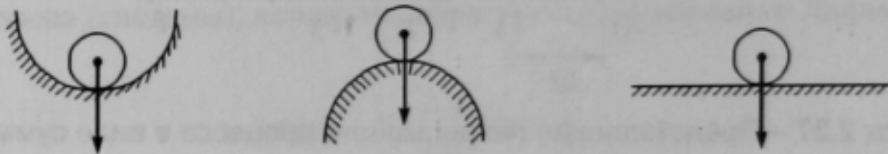
Таким образом, не решая дифференциального уравнения, можно получить реакцию системы (звена) на любое воздействие.

3 УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1 Понятие устойчивости линейных АСУ

[1,с.107; 2,с.84-90; 3,с.107-111; 4,с.119-126; 5,с.142-143]

Оценка устойчивости АСУ является центральной задачей при их исследовании. Устойчивость любой физической системы можно определить, как стремление этой системы возвратиться в исходное состояние после того, как она была выведена из него. Например, состояние равновесия шара может быть трех видов (рис. 3.1).



а) устойчивое; б) неустойчивое в) безразличное (нейтральное)

Рисунок 3.1 – Состояния равновесия шара

Отклонение системы от установившегося состояния происходит под влиянием внешних воздействий (задающих и возмущающих).

Сформулируем понятие устойчивости, ее условия с математической точки зрения. Пусть АСУ описывается линейным дифференциальным уравнением (2.29).

$$D(p)y(t) = B(p) \cdot g(t) + M(p) \cdot f(t), \quad (3.1)$$

где $g(t)$ и $f(t)$ вызывают отклонение $y(t)$ от ее установившегося значения.

Общее решение неоднородного уравнения (3.1) складывается из частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного, которые в ТАУ называются соответственно вынужденной и переходной составляющими

$$y(t) = y_B(t) + y_{II}(t), \quad (3.2)$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости линейной АСУ является:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{II}(t) = 0,$$

т.е. под устойчивостью линейной системы понимают свойство затухания переходного процесса с течением времени. Например, в системе регулирования напряжения при резком увеличении нагрузки напряжение уменьшится. Но система будет устойчивой, если с течением времени напряжение примет прежнее значение.

Для определения переходной составляющей решим уравнение (3.1) без правой части:

$$D(p)y(t) = (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)y(t) = 0.$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде суммы экспоненциальных членов

$$y_{II}(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t}, \quad (3.3)$$

где c_1, \dots, c_n — постоянные интегрирования, а p_1, \dots, p_n — корни алгебраического уравнения:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (3.4)$$

называемого характеристическим.

Постоянные интегрирования зависят от структуры АСУ и внешних воздействий $g(t)$ и $f(t)$. Они характеризуют лишь количественную сторону переходного процесса и не влияют на устойчивость системы. Устойчивость линейной системы зависит только

от вида корней характеристического уравнения и не зависит от $g(t)$ и $f(t)$, т.е. правой части уравнения (3.1).

Корни могут быть вещественными ($p=\alpha$), комплексными $p=(\alpha+j\beta)$.

Линейная система будет устойчива, если вещественные части всех корней характеристического уравнения будут отрицательными ($\alpha < 0$). Это необходимое и достаточное условие устойчивости системы. Если имеется хотя бы один вещественный корень, или хотя бы одна пара комплексных сопряженных корней с положительной вещественной частью, то вся система становится неустойчивой.

Из (3.3) видно, что $y(t) \rightarrow 0$, если каждый из ее членов в отдельности при $t \rightarrow \infty$ стремится к 0. Пусть $p_1 = \alpha_1$ – один из вещественных корней. Тогда составляющая $C_1 e^{\alpha_1 t} \rightarrow 0$, если $\alpha_1 < 0$ и неограниченно возрастает при $\alpha_1 > 0$. То же справедливо и для комплексных сопряженных корней $p_{2,3} = \alpha \pm j\beta$:

$$C_2 e^{\alpha+j\beta} + C_3 e^{\alpha-j\beta} = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + B).$$

Эта сумма $\rightarrow 0$ при $\alpha < 0$ и неограниченно возрастает при $\alpha > 0$.

Корни характеристического уравнения можно изобразить на комплексной плоскости (рис. 3.2). Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни лежали в левой полуплоскости. Мнимая ось (j) представляет собой границу устойчивости.

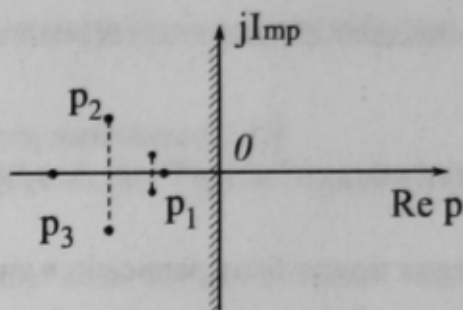


Рисунок 3.2 – Расположения корней характеристического уравнения

Различают три типа границы устойчивости.

Система находится на аperiодической границе устойчивости, если в характеристическом уравнении (3.4) имеется один нулевой корень (на комплексной плоскости он расположен в начале координат), а все остальные корни имеют отрицательные вещественные части (располагаются в левой полуплоскости). Нулевой корень появляется в уравнении (3.4) только при равенстве нулю свободного члена $a_n=0$. Тогда уравнение выглядит:

$$(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) p y(t) = 0.$$

Система устойчива относительно скорости изменения управляемой величины $y(t) = \dot{y}(t)$, а не относительно $y(t)$, так как корни характеристического уравнения:

$$a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$$

по условию имеют отрицательные вещественные части. Т.е. это нейтрально устойчивая система (см. случай в) с шаром), в котором $y(t)$ может принимать произвольные значения.

Система находится на колебательной границе устойчивости, если в характеристическом уравнении (3.4) имеется одна пара чисто мнимых сопряженных корней, а все остальные корни имеют отрицательные вещественные части. В системе при этом устанавливаются незатухающие гармонические колебания ($\sigma = 0$):

$$y(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + B) = A \sin(\beta t + B).$$

Границе устойчивости третьего типа соответствует наличие в характеристическом уравнении (3.4) бесконечного корня. Например, имеем характеристическое уравнение первого порядка:

$$(c - d)p + a_1 = 0,$$

корень которого $p_1 = -\frac{a_1}{c-d}$, будет отрицательным при $c > d$ (система устойчива) и положительным при $c < d$ (система неустойчива). Значит, границе устойчивости соответствует равенство $c = d$, при котором корень $p_1 = \infty$. Условием границы устойчивости третьего типа является обращение в нуль коэффициента a_0 в уравнении (3.4).

АСУ, находящиеся на границе устойчивости, неработоспособны, т.к. малейшее изменение параметров системы может привести к неустойчивости.

Все указанные выше условия устойчивости получены в предположении, что система описывается линейным дифференциальным уравнением (3.1), хотя все реальные АСУ не являются строго линейными.

Линейные дифференциальные уравнения получаются в результате линеаризации путем разложения в ряд Тэйлора с отбрасыванием нелинейных членов высших порядков, считающихся пренебрежимо малыми для малых отклонений. Справедливо ли говорить об устойчивости системы по ее линеаризованным уравнениям? При ответе на этот вопрос ссылаются на три теоремы А.М. Ляпунова:

1) Если вещественные части всех корней характеристического уравнения линеаризованной системы отрицательны, то реальная система также устойчива и отброшенные при линеаризации малые нелинейные члены не могут сделать ее неустойчивой.

2) Если имеется хотя бы один корень с вещественной положительной частью, то реальная система неустойчива и отброшенные при линеаризации малые нелинейные члены не могут ее сделать устойчивой.

3) Если линеаризованная система находится на границе устойчивости, то отброшенные при линеаризации малые нелинейные члены могут сделать реальную систему устойчивой или неустойчивой.

Кроме того, линеаризация основана на предположении о малости отклонений входных и выходных звеньев от их установившихся значений. Поэтому приведенные выше условия характеризуют устойчивость системы при малых отклонениях.

Поскольку вычисление корней характеристического уравнения (3.4) оказывается часто затруднительным (особенно при $n > 3$), в ТАУ применяют критерии устойчивости, позволяющие определить знаки вещественных частей без вычисления самих корней.

3.1.1 Необходимые условия устойчивости

Для устойчивости системы необходимо, но не достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения (3.4) были положительными.

Т.е. если все a_0, a_1, \dots, a_n больше нуля, то система может быть устойчивой. Но если хотя бы один из них отрицателен или равен нулю, система неустойчива или неработоспособна, т.к. находится на границе устойчивости.

Представим уравнение (3.4) в виде произведения:

$$a_0(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0. \quad (3.5)$$

При этом будем считать $a_0 > 0$ (это можно всегда выполнить, если умножить уравнение на -1). В устойчивой системе все корни $p_1 \dots p_n$ должны быть отрицательными. Если все корни вещественные, т.е. $p_1 = -\alpha_1, p_2 = -\alpha_2$ и т.д., уравнение (3.5) примет вид:

$$a_0 = (p + \alpha_1)(p + \alpha_2) \dots (p + \alpha_n) = 0.$$

Если раскрыть скобки, то получим уравнение вида (3.4), все коэффициенты которого положительны, т.к. перемножаются и складываются положительные величины.

При комплексных корнях с отрицательной вещественной частью ($p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$) результат не изменится, т.к. множители уравнения (3.5) будут иметь вид:

$$(p + \alpha - j\beta)(p + \alpha + j\beta) = (p + \alpha)^2 + \beta^2$$

и всегда положительными. Значит и перемножение такого вида множителей дает только положительные коэффициенты характеристического уравнения (3.4).

3.2 Критерий устойчивости Гурвица [1, с.108-138; 2, с.91-95; 3, с.112-140]

Поскольку определение корней характеристического уравнения при большом n делается затруднительным, а положительные коэффициенты этого же уравнения не являются достаточным условием устойчивости систем, то встает задача отыскания критерия устойчивости системы описываемых дифференциальным уравнением любого порядка.

Швейцарским профессором А. Гурвицем в 1895 г. разработан алгоритм решения этой задачи, определяющий последовательность математических операций.

Для характеристического уравнения n -го порядка:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

составляют квадратную матрицу (определитель Гурвица) коэффициентов, содержащую n строк и n столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & | & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & | & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & | & 0 & 0 \\ - & - & - & + & - & - \\ 0 & 0 & 0 & | & a_{n-1} & \\ 0 & 0 & 0 & | & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

По главной диагонали записываются n коэффициентов, начиная с a_1 и кончая a_n . Каждый столбец дополняется вверх от диагонали коэффициентами с возрастающими индексами, а вниз — коэффициенты с убывающими индексами. При этом на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше n (отсутствующие коэффициенты) пишутся нули.

Для устойчивости системы n -го порядка необходимо, чтобы при $a_0 > 0$ все n главных определителей были положительными. Определители получаются из матрицы (3.6) простым отчеркиванием n -го столбца и n -ой строки:

$$\Delta_1 = a_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ 0 & a_3 \end{vmatrix} + a_5 \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} = \\ &= a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 + a_5 a_0 a_1 > 0. \end{aligned}$$

Определитель Δ_n включает в себя всю матрицу. Т.к. в последнем столбце матрицы все элементы, кроме нижнего, равны нулю, то этот определитель выражается через предпоследний:

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} > 0. \quad (3.7)$$

Согласно определению в устойчивой системе Δ_{n-1} должен быть положительным. Поэтому $\Delta_n > 0$ тогда, когда $a_n > 0$, т.е. свободный член характеристического уравнения должен быть положительным.

Границу устойчивости можно получить приравняв $\Delta_n = 0$ при положительности остальных определителей. Это условие распадается на два (как видно из 3.7):

$$a_n = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{n-1} = 0.$$

Первое условие соответствует аperiодической границе устойчивости, второе — колебательной.

Рассмотрим частные случаи критериев устойчивости для систем первого, второго и более высоких порядков.

Уравнение первого порядка $a_0 p + a_1 = 0$;

$$a_0 > 0;$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0.$$

Единственный корень $p_1 = -\frac{a_1}{a_0}$ будет отрицательным, если при $a_0 > 0$ выполняется условие $a_1 > 0$. Т.е. для системы первого порядка достаточно выполнение необходимого условия устойчивости.

Уравнение второго порядка $a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$.

Имеет главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}.$$

В соответствии с критерием Гурвица необходимо выполнение трех условий:

$$a_0 > 0;$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 \cdot a_2 > 0.$$

Третье условие выполняется при положительном $a_2 > 0$. Т.е. и для системы второго порядка необходимое условие устойчивости является и достаточным. Апериодической границе устойчивости соответствует условие $a_2 = 0$, а колебательной — $a_1 = 0$.

Уравнение третьего порядка $a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0$.

Имеет главный определитель:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

Для этого уравнения имеем четыре условия:

$$a_0 > 0;$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0; \quad (3.8)$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 \cdot a_3 > 0.$$

Четвертое условие сводится к условию $a_3 > 0$. Условие $a_2 > 0$ при $a_0 > 0$; $a_1 > 0$ и $a_3 > 0$ может выполняться только при $a_2 > 0$. Но, кроме того, должно выполняться уравнение четвертого порядка $a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$. Имеет главный определитель:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Условия устойчивости:

$$a_0 > 0;$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0;$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ 0 & a_3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 > 0 ;$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 \cdot a_4 > 0.$$

Кроме положительности всех коэффициентов необходимо выполнение условий

$$a_1(a_2a_3 - a_1a_4) - a_0a_3^2 > 0 \quad \text{и} \quad a_1a_2 - a_3a_0 > 0.$$

Для уравнения пятого порядка появляются еще дополнительные условия устойчивости, кроме положительности коэффициентов.

Как видно, уже для уравнений выше четвертой степени условия устойчивости по критерию Гурвица получаются громоздкими. Поэтому он используется для анализа уравнений четвертого порядка.

Недостатком алгебраических критериев (в т.ч. и критерия Гурвица) является то, что в случае неустойчивости АСУ они не дают ответа на вопрос, как надо изменить параметры системы, чтобы она стала устойчивой.

3.3 Критерий устойчивости Михайлова

[1,с.139-143; 2,с.95-102; 3,с.141-144; 4,с.131-137; 5,с.149-153]

Сформулирован А.В. Михайловым в 1936 г.

Возьмем характеристический многочлен линейной системы n -го порядка:

$$D(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n. \quad (3.9)$$

Подставим в этот полином чисто мнимое значение $p=j\omega$ и получим характеристический комплекс:

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где вещественная часть $X(\omega)$ будет содержать четные степени параметра ω :

$$X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots, \quad (3.10)$$

а мнимая часть $Y(\omega)$ - нечетные:

$$Y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots, \quad (3.11)$$

Комплекс $D(j\omega)$ изобразится на комплексной плоскости в виде вектора с проекциями на вещественную и мнимую оси соответственно $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ (рис. 3.3).

Если значения ω менять непрерывно от 0 до ∞ , то вектор $D(j\omega)$ своим концом опишет кривую (годограф), которая называется кривой Михайлова. Практически кривая Михайлова строится по точкам. Задаются различными значениями ω и по (3.10) и (3.11) вычисляются $X(\omega)$ и $Y(\omega)$.

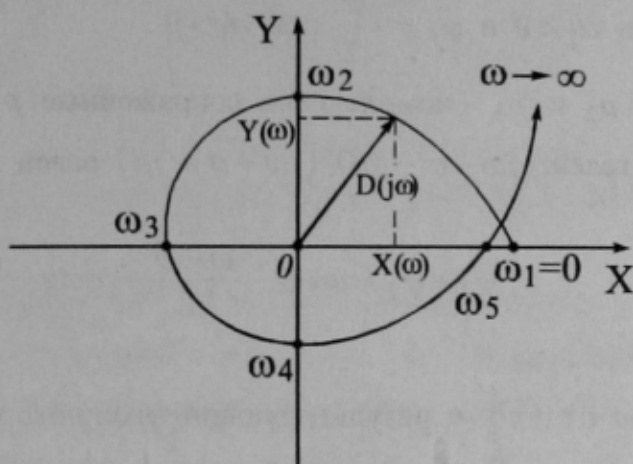


Рисунок 3.3 – Изображение кривой Михайлова на комплексной плоскости

Для устойчивости системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы вектор $D(j\omega)$, описывающий кривую Михайлова, при изменении параметра ω от 0 до ∞ имел угол поворота $\psi = n \frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

Для доказательства представим полином (3.9) в виде произведения сомножителей:

$$D(p) = a_0(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n),$$

где p_1, p_2, \dots, p_n - корни характеристического уравнения.

Тогда характеристический комплекс примет вид:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n). \quad (3.12)$$

Т.е. $D(j\omega)$ является произведением n комплексных чисел

$$A_1 e^{j\psi_1}, A_2 e^{j\psi_2}, \dots, A_n e^{j\psi_n} \quad \left(A_n = \sqrt{\omega^2 + |p_n|^2}, \quad \psi_n = \arctg - \frac{\omega}{|p_n|} \right),$$

аргументы которых $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ при перемножении складываются. Поэтому результирующий угол поворота вектора $D(j\omega)$ будет равен сумме углов поворота отдельных сомножителей (3.12) при изменении ω от 0 до ∞ :

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n . \quad (3.13)$$

Пусть корень вещественный $p_1 = \alpha_1$. Тогда аргумент сомножителя $(j\omega - p_1)$ равен $\psi_1(\omega) = \arctg(-\omega/\alpha_1)$. При изменении ω от 0 до ∞ результирующий угол поворота $\psi_1 = +\frac{\pi}{2}$ при $\alpha_1 < 0$ и $\psi_1 = -\frac{\pi}{2}$ при $\alpha_1 > 0$.

Пусть два корня p_2 и p_3 - комплексные сопряженные $p_{2,3} = \alpha \pm j\beta$. Тогда аргумент пары сомножителей $(j\omega - \alpha - j\beta) \cdot (j\omega - \alpha + j\beta)$ равен

$$\psi_3 + \psi_2 = \arctg -\frac{\omega - \beta}{\alpha} + \arctg -\frac{\omega + \beta}{\alpha} .$$

При изменении ω от 0 до ∞ результирующий угол поворота $\psi_3 + \psi_2 = 2\frac{\pi}{2}$ при $\alpha < 0$ и $\psi_3 + \psi_2 = -2\frac{\pi}{2}$ при $\alpha > 0$.

Если характеристическое уравнение будет иметь l корней вещественных или комплексных с положительной вещественной частью, то им будет соответствовать сумма углов поворотов, равная $\left(-l\frac{\pi}{2}\right)$. Остальным $(n-l)$ корням с отрицательной вещественной частью, будет соответствовать сумма углов поворотов, равная $(n-l)\frac{\pi}{2}$. Общий угол поворота вектора $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ согласно (3.13):

$$\psi = (n-l)\frac{\pi}{2} - l\frac{\pi}{2} = n\frac{\pi}{2} - l\pi . \quad (3.14)$$

Согласно требованию устойчивости необходимо и достаточно, чтобы все корни имели отрицательные вещественные части ($l = 0$). Поэтому в устойчивой системе на основании (3.14) $\psi = n\frac{\pi}{2}$.

Для устойчивой системы кривая Михайлова всегда имеет плавную спиралевидную форму, конец которой уходит в ∞ в квадранте, номер которого равен степени n характеристического уравнения (рис. 3.4). Это позволяет сформулировать критерий Михайлова в следующем виде. Для устойчивости автоматической системы необходимо, чтобы кривая Михайлова проходила последовательно столько квадрантов, какова степень n характеристического уравнения, окружая начало координат против хода часовой стрелки.

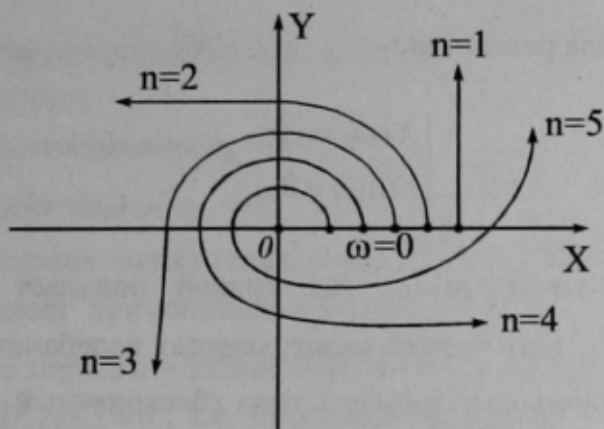


Рисунок 3.4 – Виды кривых Михайлова для устойчивых систем n -го порядка

При этом корни уравнений $X(\omega) = 0$ и $Y(\omega) = 0$ должны чередоваться. Так как кривая Михайлова всегда начинается с точки $\omega_1 = 0$, расположенной на вещественной оси, где мнимая часть обращается в нуль $Y(\omega_1) = Y(0) = 0$, то при увеличении ω от 0 до ∞ должна обращаться в нуль вещественная часть $X(\omega_2) = 0$, затем мнимая $Y(\omega_3) = 0$, затем опять вещественная $X(\omega_4) = 0$ и т.д., причем $0 = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$. Поэтому для исследования устойчивости системы достаточно определить ее качественный вид по токам пересечения с осями координат.

При четной n кривая $\rightarrow \infty$ параллельно оси X , а при нечетной - параллельно оси Y (всегда в n -ом квадранте).

По кривой Михайлова может быть определено наличие границ устойчивости (рис. 3.5).

При апериодической границе устойчивости (нулевом корне) $a_n = 0$, и кривая Михайлова идет из начала координат (рис. 3.5, а). При колебательной границе устойчивости $D(p)$ обращается в нуль при подстановке $p = j\omega_0$:

$$D(j\omega_0) = X(\omega_0) + jY(\omega_0) = 0.$$

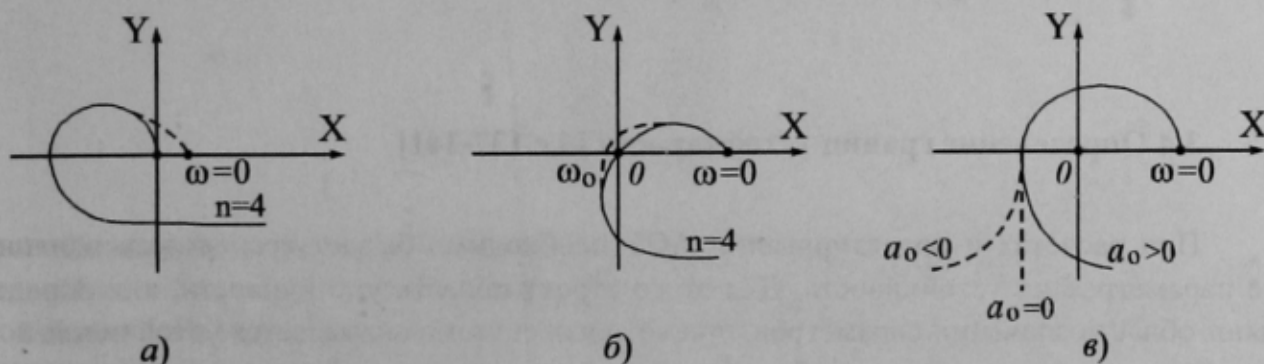


Рисунок 3.5 – Виды кривых Михайлова при прохождении системы на границах устойчивости

Отсюда вытекает два равенства :

$$\begin{cases} X(\omega_0) = 0; \\ Y(\omega_0) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Это значит, что точка $\omega = \omega_0$ на кривой попадает в начало координат (рис. 3.5, б). При этом ω_0 есть частота незатухающих колебаний системы.

Для границы устойчивости третьего типа (бесконечный корень) конец кривой перебрасывается в другую сторону. При этом a_0 будет проходить через нулевые значения, меняя знак плюс на минус (рис. 3.5, в).

Важно отметить следующее. На границе устойчивости системы все остальные корни характеристического уравнения должны иметь отрицательные вещественные части. Поэтому, кроме условия (3.15), требуется, чтобы кривая проходила бы все остальные квадранты, кроме пропущенного из-за прохождения через начало координат (как показано на рисунках 3.5, а и б). Если же кривая имеет вид, показанный на рис. 3.6, то система находится не на границе устойчивости, а является неустойчивой. Т.е. очертания кривой Михайлова на границе устойчивости должно быть таким, чтобы после малой деформации ее в начале координат (случай а и б) и при малом $a_0 > 0$ (случай в) можно было удовлетворить критерию устойчивости.

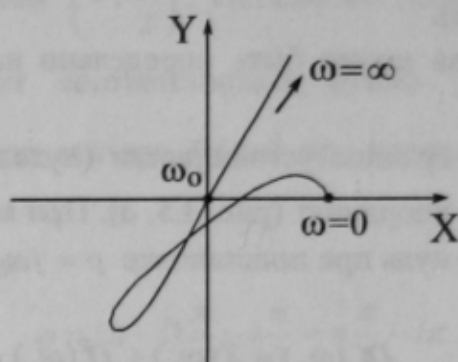


Рисунок 3.6 – Пример кривой Михайлова неустойчивой системы

3.4 Определение границ устойчивости [4,с.137-141]

При расчетах и проектировании АСУ необходимо бывает исследовать влияние ее параметров на устойчивость. Для этого строят область устойчивости, т.е. определяют области значений параметров, при которых система оказывается устойчивой.

Рассмотрим построение области устойчивости в плоскости двух параметров A и B (это могут быть, например, коэффициент усиления и постоянная времени). Для построения таких областей необходимо нанести линии, соответствующие границе устойчивости. Область, ограниченная этими линиями, и будет областью устойчивости.

Для построения границ устойчивости используются три признака существующих типов границ устойчивости:

апериодической устойчивости $a_n = 0$;

третьего типа устойчивости $a_o = 0$;

для получения условия колебательной границы устойчивости у систем не выше четвертого порядка может применяться критерий Гурвица. При этом $\Delta_{n-1} = 0$. Для систем более высокого порядка удобнее пользоваться критерием Михайлова, в соответствии с которым $D(j\omega_o) = 0$, т.е. прохождение кривой Михайлова через начало координат.

Если интересующие нас два параметра A и B входят линейно в характеристический комплекс, то для границ устойчивости колебательного типа уравнение $D(j\omega_o, A, B) = 0$ распадается на два:

$$\left. \begin{aligned} X(\omega_o, A, B) &= 0 \\ Y(\omega_o, A, B) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

где ω_o дает значение чисто мнимого корня, т.е. частоту гармонических колебаний системы.

Выражение (3.16) является параметрическим уравнением границы устойчивости при соблюдении дополнительного условия отрицательности вещественных частей всех остальных корней. Это уравнение изображается в виде некоторых кривых на плоскости параметров A и B . Задаваясь разными значениями ω ($0 \leq \omega \leq \infty$) из уравнений (3.16) определяют значения параметров A и B , и по полученным точкам строятся границы устойчивости на плоскости A и B .

Для упрощения выделения границ области устойчивости вводится штриховка полученных кривых. При перемещении вдоль кривой в сторону увеличения ω надо штриховать ее с левой стороны, если будет положительным определитель, составленный из частных производных (3.16):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial A} & \frac{\partial X}{\partial B} \\ \frac{\partial Y}{\partial A} & \frac{\partial Y}{\partial B} \end{vmatrix} \quad (3.17)$$

Если определитель (3.17) отрицателен, то кривая штрихуется справа.

При соблюдении этого правила штриховка будет направлена внутрь области устойчивости. При этом значения параметра A откладывается по оси абсцисс вправо, а B – по оси ординат вверх.

3.5 Критерий устойчивости Найквиста [2,с.102-110; 3,с.133-141; 4,с.141-153]

Сформулирован в 1932 г. американским ученым Найквистом. В отличие от критериев Гурвица и Михайлова позволяет судить об устойчивости замкнутой АС по виду АФЧХ разомкнутой системы.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(p) = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \dots + c_n}.$$

При подстановке $p = j\omega$ получим частотную передаточную функцию разомкнутой системы (АФЧХ):

$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{C(j\omega)} = A(\omega)e^{j\psi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega),$$

где АЧХ $A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{Y_M}{X_M}$ является модулем $W(j\omega)$, а сдвиг фаз ψ - ее аргументом (фазой).

Если изменять ω от $-\infty$ до ∞ , то вектор $W(j\omega)$ своим концом опишет на комплексной плоскости кривую, которая и называется АФЧХ (рис. 3.7). Ветвь для отрицательных ω является зеркальным отражением относительно вещественной оси для положительных ω . Поскольку в реальных системах $m < n$, то при $\omega \rightarrow \infty$, $A(\omega) \rightarrow 0$ и точка АФЧХ, соответствующая частоте $\omega = \pm\infty$, попадает в начало координат.

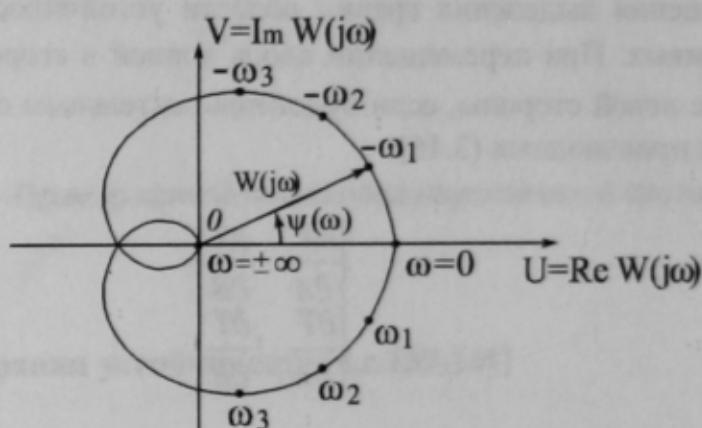


Рисунок 3.7 – График АФЧХ разомкнутой системы

3.5.1 Общая формулировка критерия Найквиста

Для устойчивости замкнутой АС необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении ω от 0 до $+\infty$ охватывала точку с координатами

$(-1, j0)$ на угол $l\pi$ против часовой стрелки, где l – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, имеющих положительные вещественные части. Если АФЧХ проходит через точку $(j0, -1)$, то замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости.

Для доказательства введем вспомогательную функцию:

$$W_1(p) = 1 + W(p) = \frac{C(p) + B(p)}{C(p)} = \frac{D(p)}{C(p)}, \quad (3.18)$$

где $W(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы;

$D(p)$ и $C(p)$ – соответственно характеристические полиномы замкнутой и разомкнутой системы.

Найдем комплекс:

$$W_1(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{C(j\omega)} = \frac{A_1(\omega)e^{j\psi_1(\omega)}}{A_2(\omega)e^{j\psi_2(\omega)}} = A(\omega)e^{j\psi(\omega)}$$

и определим угол поворота (аргумент) вектора $W_1(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$. Этот угол по правилу деления комплексных чисел равен разности аргументов числителя ψ_1 и знаменателя ψ_2 :

$$\psi = \psi_1 - \psi_2.$$

В п. 3.3 было показано, что в устойчивой замкнутой системе угол поворота вектора $D(j\omega)$ $\psi_1 = n \frac{\pi}{2}$.

Если в характеристическом уравнении разомкнутой системы имеется l корней с положительной вещественной частью, а остальные $(n - l)$ корней имеют отрицательные вещественные части, то согласно (3.14):

$$\psi_2 = n \frac{\pi}{2} - l\pi.$$

Отсюда разность углов:

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 = n \frac{\pi}{2} - \left(n \frac{\pi}{2} - l\pi \right) = l\pi.$$

Это означает, что в устойчивой замкнутой системе при изменении ω от 0 до $+\infty$ вектор $W_1(j\omega)$ должен повернуться вокруг начала координат на угол $l\pi$ против часовой стрелки. Но $W_1(j\omega)$ согласно (3.18) отличается от $W(j\omega)$ на -1 . Поэтому в

устойчивой замкнутой системе вектор $W(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ должен повернуться вокруг точки $(-1, j0)$ на угол $l\pi$ против часовой стрелки. Т.е. $W(j\omega)$ должна охватить точку $(-1, j0)$ на угол $l\pi$ против часовой стрелки, что и требовалось доказать.

Если АФЧХ строится для диапазона частот от $-\infty$ до $+\infty$, то угол ψ должен быть вдвое больше, т.е. $2l\pi$.

3.5.2 Частная формулировка Найквиста

В случае устойчивости разомкнутой системы (что чаще всего и бывает) $l=0$.

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой устойчивой системы не охватывала точку $(-1, j0)$.

При $l=0$ исходя из общей формулировки Найквиста охват точки $(-1, j0)$ составит угол 0π , что фактически означает неохват ее.

3.6 Использование логарифмических частотных характеристик для оценки устойчивости [2, с.108; 4, с.150]

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы ЛФЧХ устойчивой разомкнутой системы не пересекала ось частот (1) или пересекала бы ее четное число раз при ЛАЧХ $L(\omega) > 0$ (рис. 3.8 и 3.9).

Колебательной границе устойчивости соответствует случай, когда ЛАЧХ ЛФЧХ пересекают ось частот в одной точке (3).

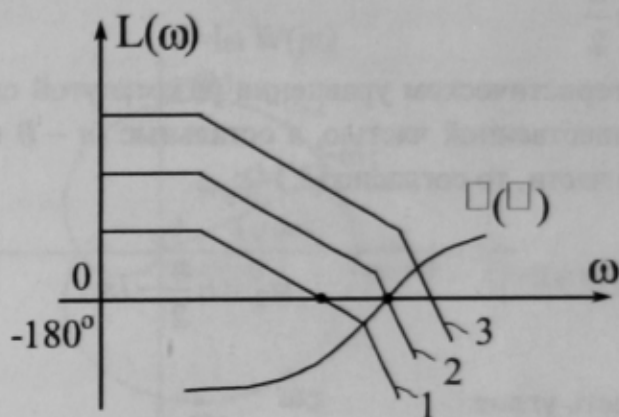


Рисунок 3.8 — Определение устойчивости системы по АФЧХ

- 1 — абсолютно устойчивая система;
- 2 — неустойчивая система;
- 3 — колебательная граница устойчивости.

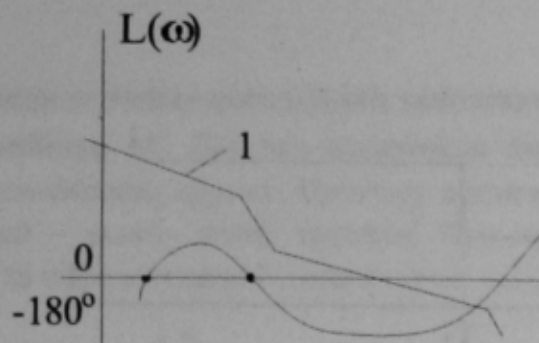


Рисунок 3.9 – Определение устойчивости системы по АФЧХ

1 – абсолютно устойчивая система.

4 ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

4.1 Требования к качеству процесса управления. Показатели качества [2,с.111-112; 4,с.25-28; 200-203]

Устойчивость АСУ обеспечивает затухание переходных процессов с течением времени, т.е. обеспечивается возможность прихода системы в установившееся состояние при любом внешнем воздействии.

Но, кроме этого требуется, чтобы установившееся состояние было близко к заданному и, чтобы затухание переходного процесса было достаточно быстрым, а отклонения (колебания) при этом были бы невелики.

Поэтому после обеспечения устойчивости системы необходимо обеспечить требуемое качество процесса управления, в понятие которого входят:

- качество переходного процесса;
- точность системы в установившемся состоянии.

Показатели качества переходного процесса чаще всего определяются по реакции АС на ступенчатое изменение входного воздействия (рис. 4.1).

y_{01} , y_{02} и y_{T1} , y_{T2} - установившиеся и требуемые значения управляемой величины до и после момента $t = t_1$ изменения входного воздействия.

К показателям качества переходного процесса (динамическим показателем качества АС) относятся:

- динамическая ошибка $\Delta y_{\text{дин}}(t)$ - разность между требуемым и действительным значением управляемой величины, возникающая в процессе управления (показана на рисунке штриховкой)

$$\Delta y_{\text{дин}}(t) = y_{T2} - y(t),$$

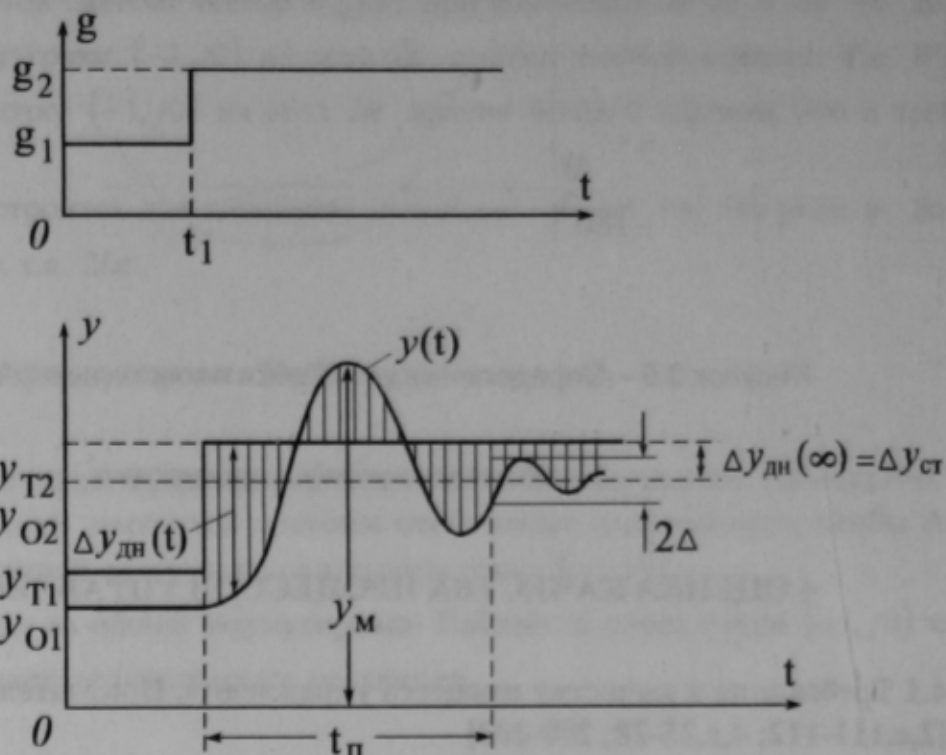


Рисунок 4.1 – Определение показателей качества по графику переходного процесса

которая характеризует точность работы АС в динамическом режиме;

- перерегулирование (максимальное отклонение управляемой величины y_M)

$$\sigma, \% = \frac{y_M - y_{02}}{y_{02}} \cdot 100\%.$$

Теоретически $y_{02} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y(\infty)$. Но в реальных АС из-за потерь переходные процессы затухают за небольшое конечное время;

- время переходного процесса t_n определяемое длительностью переходного процесса от момента приложения воздействия (t_1) до момента, после которого имеет место неравенство

$$|y(t) - y_{02}| \leq \Delta,$$

где Δ - заданная постоянная величина ($1 \leq 5\%$ от y_{02}). t_n характеризует степень быстродействия АС.

- число колебаний m (или частота) управляемой величины за время t_n . Оно характеризует меру колебательности АС.

Чем меньше числовые значения показателей качества переходного процесса, тем лучше динамические свойства АС. Все эти показатели взаимосвязаны, и изменение одного из них ведет к изменению других. Поэтому достижение одновременного минимума всех показателей – задача очень трудная. При проектировании АС важно, чтобы они не выходили за определенные границы (рис. 4.2).

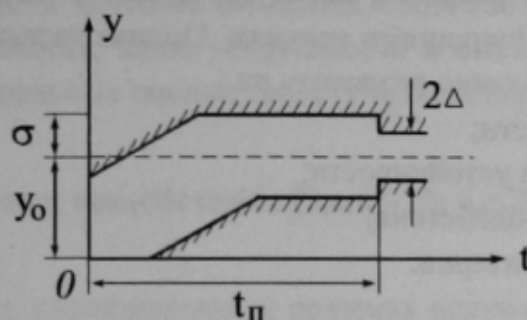


Рисунок 4.2 – График допустимых границ изменения показателей качества

Точность системы характеризуется такими показателями, как: статические и скоростные ошибки, возникающие при различных типовых воздействиях; коэффициенты ошибок при произвольном внешнем воздействии и др.

Для оценки точности (статических свойств) АС используют так называемые статические ошибки по задающему и возмущающим воздействиям. Статической ошибкой Δy_{cm} называется отклонение управляемой величины $y(t)$ от требуемого значения y_T в статическом режиме, т.е. при постоянных значениях входных воздействий.

$$\Delta y_{cm} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta y_{dyn}(t) = y_{T2} - y_{02}$$

В общем виде статическая ошибка АС:

$$\Delta y_{cm} = \Delta y_g + \sum_{i=1}^N \Delta y_{f_i},$$

где Δy_g и Δy_{f_i} – составляющие от постоянных Δy_g и $f_i(t)$. Чем меньше статическая ошибка, тем выше точность и статические свойства АС.

4.2 Критерии качества [4,с.200-203]

Любая АСУ должна управлять объектом или процессом с определенной точностью. В конечном счете качество управления зависит от мгновенных величин ошибки, равных разности

$$x(t) = g(t) - y(t)$$

между заданным $g(t)$ и фактическим $y(t)$ значениями регулируемой величины. Ошибка определяется характером изменения $g(t)$ и $y(t)$, которые изменяются чаще всего случайным образом. Поэтому оценка качества управления по мгновенным значениям ошибкам $x(t)$ не используется, а применяются вероятностные оценки ошибки.

В ТАУ применяют также методы, позволяющие оценивать качество систем по их поведению в типовых режимах, когда случайные воздействия аппроксимируются заданными (типовыми) функциями времени. Оценка качества САУ ведется по критериям качества, которые можно разделить на :

- критерии точности;
- критерии запаса устойчивости;
- критерии быстродействия;
- комплексные критерии.

Критерии точности используют для оценки величин ошибок, возникающих в различных типовых установившихся режимах, а также при плавном, медленном изменении $g(t)$ и $f(t)$. К типовым режимам относятся такие, при которых:

$$- g(t) = g_1 \cdot 1(t) \text{ и } f(t) = f_1 \cdot 1(t), \text{ где } g_1 = \text{const и } f_1 = \text{const};$$

- $g(t) = v_1 t$ и $g(t) = \frac{a_1 t^2}{2}$ при $f(t) = f_1 \cdot 1(t)$, где v_1 и a_1 - скорость и ускорение изменения входного воздействия;

$$- g(t) = g_m \cdot \sin \omega_k t.$$

Критерием точности служит значение ошибки в установившемся режиме $x_{уст} = x(t)_{t \rightarrow \infty}$, причем учитывается как ошибка от входного воздействия $x_y = g(t) - y(t)$, так и от возмущения $x_f = -y(t)$ при $g(t) = 0$.

Критерий запаса устойчивости определяет отдаленность системы от границ устойчивости. Используются два подхода для оценки качества по этому критерию.

Первый основан на рассмотрении переходных процессов (переходных и весовых функций, расположения полюсов и нулей $\Phi(p)$ замкнутой системы и т.п.). При этом критериями запаса устойчивости служат величина \square и m переходного процесса, его затухание и колебательность.

При втором подходе изучаются частотные характеристики системы, ее резонансные свойства. В качестве критериев запаса устойчивости используют запасы устойчивости по амплитуде и фазе, показатель колебательности и др.

При оценке быстродействия также используются временной и частотный подходы. Критерием быстродействия при временном подходе является время затухания переходного процесса системы t_m , а при частотной – полоса пропускания амплитудной характеристики замкнутой системы.

Временные критерии качества называют еще прямыми, т.к. с их помощью непосредственно оценивается процесс управления при конкретном типовом воздействии. Частотные критерии называют косвенными, т.к. процесс управления оценивается по его отображению в области частоты \square , а не времени t .

Существует связь между частотами и временными критериями качества процесса управления, которая в общем виде может быть получена только для простых систем второго порядка.

Частотные критерии более эффективны при оценке качества, т.к. вычисления в частотной области проще, чем во временной.

К комплексным критериям качества относятся обобщенные критерии, характеризующие одновременно точность, запас устойчивости и быстродействия. К ним относятся, прежде всего, интегральные оценки свойств кривой переходного процесса.

4.3 Точность при типовых воздействиях [2,с.67-75; 4,с.203-209]

Точность работы САУ в установившихся режимах оценивается по величине установившейся ошибки $x_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ при типовых входных и возмущающих воздействиях. Чем меньше эта ошибка, тем выше качество САУ.

Простейшими типовыми режимами работы являются режимы при постоянной величине внешнего воздействия, при изменении внешнего воздействия с постоянной скоростью, с постоянным ускорением (воздействия в виде квадратичной функции), при гармоническом воздействии.

Величина ошибки может быть определена из общего дифференциального уравнения САУ относительно ошибки (см. п. 2.7).

$$D(p) \cdot x(t) = C(p) \cdot g(t) + \sum_{i=1}^l M_{f_i}(p) \cdot f_i(t), \quad (4.1)$$

где $D(p)$, $C(p)$ и $M_{f_i}(p)$ – многочлены; l – число действующих на систему возмущений. В установившемся режиме все производные равны нулю $\left(p = \frac{d}{dt} = 0\right)$.

Преобразуя выражение (4.1) по Лапласу при нулевых начальных условиях, получим изображение ошибки:

$$X(p) = \Phi_x(p)G(p) + \sum_{i=1}^l \Phi_{f_i}(p)F_i(p), \quad (4.2)$$

где $\Phi_x(p) = \frac{C(p)}{D(p)} = \frac{1}{1+W(p)}$ – передаточная функция замкнутой системы по ошибке;

$\Phi_{f_i}(p) = \frac{M_{f_i}(p)}{D(p)} = \frac{W_{f_i}}{1+W(p)}$ – передаточная функция замкнутой системы по возмущению;

$W(p)$ и $W_{f_i}(p)$ - передаточные функции разомкнутой системы по управляющему и возмущающему воздействиям.

Исходя из теоремы о конечном значении:

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} x(p) \cdot p. \quad (4.3)$$

Подставив в (4.3) выражение (4.2) получим:

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{G(p)}{1 + W(p)} \right] + \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{W_{f_i}(p) \cdot F_i(p)}{1 + W(p)} \right] = x_g + x_f, \quad (4.4)$$

где x_g и x_f - составляющие установившейся ошибки от воспроизведения входного воздействия $g(t)$ и от действия возмущения $f(t)$.

4.3.1 Постоянное ступенчатое воздействие

При этом $g(t) = g_1 \cdot 1(t)$. Для простоты примем одно возмущение $f_1(t) = f_1 \cdot 1(t) \cdot g_1$ и $f_1 - const$.

Установившаяся ошибка при этих воздействиях называется статической $x_{ст}$. Изображения воздействий при этом будут

$$G(p) = \frac{g_1}{p}, \quad F(p) = \frac{f_1}{p}.$$

На основании (4.3) и (4.4) получим:

$$x_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{g_1 / (p)}{1 + W(p)} \right] + \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{f_1 / (p)}{1 + W(p)} \right] = x_{gcc} + x_{fcc}.$$

x_{gcc} отлична от нуля только в статических системах с $W(p) = K \cdot B(p) / C(p)$, где $B(p)$ и $C(p)$ не содержат множителя p , а свободные члены равны 1. Тогда $W(0) = K$ - коэффициенту усиления разомкнутой системы. Тогда

$$x_{gcc} = \frac{g_1}{1 + K}. \quad (4.5)$$

Для системы статической по отношению к $f(t)$:

$$x_{fcc} = \frac{W_f(p) \cdot f_1}{1 + K}, \quad (4.6)$$

где $W_f(0) = \gamma$ - коэффициент статизма системы с разомкнутой цепью управления, равный отношению x_{ycm} к постоянному возмущению.

4.3.2 Воздействие, изменяющиеся с постоянной скоростью

При этом $g(t) = v_1 \cdot t \cdot 1(t)$, где $v_1 = const$ и $f(t) = f_1 \cdot 1(t)$.

Такой режим применяется в следящих системах.

В этом случае:

$$G(p) = \frac{v_1}{p^2}, \quad F(p) = \frac{f_1}{p},$$

$$x_{ycm} = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{v_1 / p^2}{1 + W(p)} \right] + \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{W_f(p) f_1 / p}{1 + W(p)} \right] = x_{gcc} + x_{fcc}.$$

Второе слагаемое аналогично (4.6) дает статическую ошибку при $f_1 = const$.

Первое слагаемое имеет смысл только в случае, когда многочлен $C(p)$, входящий в $W(p) = B(p)/C(p)$, не имеет свободного члена. Т.е. $W(p)$ должно иметь нулевой корень и может быть представлено в виде:

$$W(p) = \frac{K(B_0 p^m + \dots + B_{m-1} p + 1)}{p(C_0 p^{n-1} + \dots + C_{n-2} p + 1)}.$$

Тогда первая составляющая установившейся ошибки определяется

$$x_{gcc} = \frac{v_1}{K}, \quad (4.7)$$

и называется скоростной ошибкой.

При постоянном задающем воздействии $g(t) = g_1 = const$ в такой системе, обладающей нулевым полюсом в $W(p)$, статическая ошибка $x_{gcc} = 0$, а имеется постоянное значение скоростной ошибки x_{gcc} .

Система, отличающаяся отсутствием статической ошибки, называется астатической системой. Для технического осуществления астатической системы необходимо присутствие интегрирующего звена.

Как видно из (4.5) и (4.7) для уменьшения величины ошибок нужно добиваться большого значения общего коэффициента K усиления разомкнутой цепи проектируемой системы.

Можно получить САУ с астатизмом второго и более высокого n -го порядка, при условии, что $W(p)$ имеет двойной нулевой полюс или нулевой полюс n -го порядка.

4.3.3 Воздействие изменяется с постоянным ускорением

При этом $g(t) = \frac{a_1 t^2}{2} \cdot 1(t)$, где $a_1 = \text{const}$. $f(t)$ принимается, как и в предыдущих случаях постоянным. Для такой системы $G(p) = \frac{a_1}{p^3}$. Первое слагаемое в (4.4) имеет смысл только при астатизме второго порядка, когда:

$$W(p) = \frac{K(B_0 p^m + \dots + B_{m-1} p + 1)}{p^2(C_0 p^{n-2} + \dots + C_{n-3} p + 1)},$$

и оно называется ошибкой от ускорения:

$$x_{\text{гuy}} = \frac{a_1}{K}.$$

Аналогично можно говорить и об астатизме системы по отношению к возмущающему воздействию $f(t)$, но нулевыми полюсами должна обладать $W_f(t)$.

4.3.4 Гармоническое (синусоидальное) воздействие

При этом $g(t) = g_{\text{max}} \cdot \sin \omega_k t$. Установившиеся ошибки в этом случае определяются частотными характеристиками замкнутой системы. Рассмотрим ошибку только от действия входного задающего воздействия:

$$x = \frac{g}{1 + W(p)}.$$

В линеаризованной системе ошибка в установившемся режиме будет меняться также по гармоническому закону $x = x_{\text{max}} \sin(\omega_k t + \psi)$.

Точность системы в этом случае определяется по амплитуде ошибки (в выражении для $W(p)$ вместо p подставляем $j\omega_k$):

$$x_{\max} = \frac{g_{\max}}{|1 + W(j\omega_k)|}.$$

Так как предполагается, что $x_{\max} \ll g_{\max}$, то модуль знаменателя значительно больше единицы. Поэтому можно записать:

$$x_{\max} \approx \frac{g_{\max}}{|W(j\omega_k)|} = \frac{g_{\max}}{A(\omega_k)}, \quad (4.8)$$

где $A(\omega_k)$ - модуль $W(p)$ разомкнутой системы при $\omega = \omega_k$. Чтобы вычислить x_{\max} в установившемся режиме нужно знать аналитическое выражение для $W(p)$, либо АЧХ или АФЧХ экспериментальной разомкнутой системы.

Выражение (4.8) позволяет сформулировать требования к ЛАЧХ $L(\omega_k) = 20 \lg A(\omega_k)$, при которых обеспечивается требуемое значение x_{\max} . Для этого необходимо по заданному значению g_{\max} и допустимой $x_{\max \text{ доп.}}$ вычислить требуемое значение модуля $W(j\omega_k)$ разомкнутой системы в децибелах:

$$L(\omega_k) = 20 \lg A_{\text{тп}}(\omega_k) = 20 \lg \frac{g_{\max}}{x_{\max \text{ доп.}}},$$

отложить его на логарифмической сетке при $\omega = \omega_k$ (рис. 4.3).

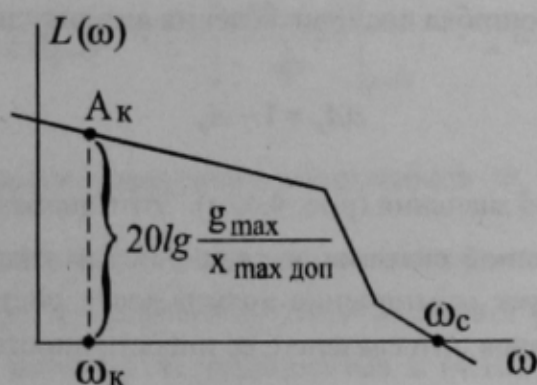


Рисунок 4.3 – Определение соответствия ЛАЧХ допустимому значению установившейся ошибки

По полученной контрольной точке A_k для ЛАЧХ определяют выполнение условия $x_{\max} < x_{\max \text{ доп.}}$. Если ЛАЧХ пройдет ниже точки A_k , то ошибка будет больше допустимой, если выше, то не превосходит допустимой.

Если использовать основную АЧХ и ФЧХ

$$A_3(\omega) = |\Phi(j\omega)|, \quad \varphi_3(\omega) = \arg \Phi(j\omega)$$

построенные по главной передаточной функции замкнутой системы, то они включают всю информацию об установившемся слежении за синусоидальным задающим воздействием (рис. 4.4).

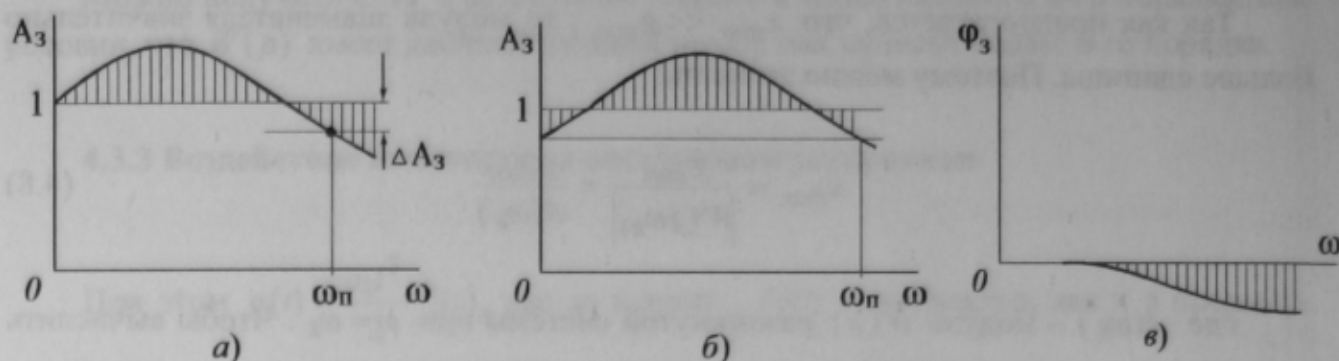


Рисунок 4.4 – Использование ЛАЧХ и ЛФЧХ замкнутой системы для оценки установившейся ошибки

Установившаяся ошибка воспроизведения g_{\max} определяется заштрихованными областями ординат. Ошибки в амплитуде при $\omega = 0$ (на рис. 4.4, б) является статической ошибки для системы без астатизма. ФЧХ представляет установившуюся ошибку из-за сдвига фазы на выходе по отношению к $g(t)$ (рис. 4.4, в):

$$y(t) = A_3 \sin(\omega t + \varphi_3(\omega)).$$

$A_3(\omega) \rightarrow 0$ обычно при $\omega \rightarrow \infty$. В результате получается ограниченный диапазон частот ω_n , в котором ошибка воспроизведения амплитуды

$$\Delta A_3 = 1 - A_3$$

не превышает допустимого значения (рис. 4.4, а). Этот диапазон $0 < \omega < \omega_n$ определяет полосу пропускания данной системы, являющуюся важным показателем точности системы. Она характеризует ограничение возможности системы в воспроизведении быстро меняющихся сигналов, что связано с ее инерционностью.

✓ 4.4 Точность при медленно произвольно меняющихся воздействиях. Коэффициенты ошибок [2,с.75-79; 4,с.209-211]

Для функции времени $g(t)$ или $f(t)$, имеющей произвольную, но достаточно плавную вдали от начальной точки процесса форму, через некоторое время имеет значение только конечное число m производных, например:

$$\frac{dg}{dt}, \frac{d^2g}{dt^2}, \dots, \frac{d^m g}{dt^m}.$$

Изображение ошибки системы от входного задающего воздействия $g(t)$ можно определить из (4.2)

$$X(p) = \Phi_x(p)\sigma(p) = \frac{\sigma(p)}{1+W(p)}.$$

Если разложить $\Phi_x(p)$ передаточную функцию по ошибке в ряд по возрастающим степеням p , то

$$X(p) = \left[C_0 + C_1 p + \frac{C_2}{2!} p^2 + \frac{C_3}{3!} p^3 + \dots \right] G(p), \quad (4.9)$$

сходящийся при малых значениях p , т.е. больших значениях времени t , что соответствует установившемуся процессу изменения $y(t)$.

Перейдя к оригиналу, получим:

$$x_{уст} = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots \quad (4.10)$$

Величины $C_0, C_1, C_2 \dots$ называются коэффициентами ошибок. Они могут быть определены согласно общему правилу разложения передаточной функции $\Phi_x(p)$ в ряд Тейлора по формулам:

$$C_0 = [\Phi_x(p)]_{p=0}; \quad C_1 = \left[\frac{d\Phi_x(p)}{dp} \right]_{p=0}; \quad C_m = \left[\frac{d^m \Phi_x(p)}{dp^m} \right]_{p=0}.$$

Так как $\Phi_x(p)$ является отношением многочленов $\Phi_x(p) = \frac{C(p)}{D(p)}$, то эти же коэффициенты ошибок можно получить делением многочлена числителя $C(p)$ на многочлен знаменателя $\bar{D}(p)$ и сравнением получающегося ряда с выражением (4.9). После этого подставив значения коэффициентов в (4.10), получим выражение для $x_{уст}$. Коэффициент C_0 отличен от нуля только в статических системах. В системах с астатизмом первого порядка $C_0 = 0$; второго порядка - $C_0 = 0$ и $C_1 = 0$, и т.д.

4.5 Определение запаса устойчивости и быстродействия по кривой переходного процесса [4, с.211-213]

Оценку запаса устойчивости и быстродействия можно произвести по виду кривой переходного процесса в САУ при типовом воздействии (входном или возмущающем), например, в виде единичного скачка $g(t) = 1(t)$. При этом кривая будет являться переходной характеристикой системы $h(t)$ (рис. 4.5).

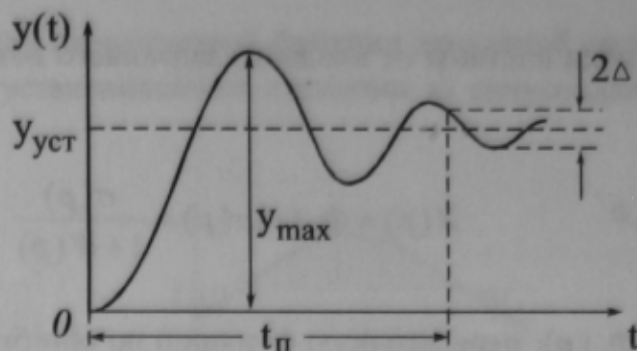


Рисунок 4.5 – Оценка запаса устойчивости и быстродействия по графику переходного процесса

Запас устойчивости может быть охарактеризован перерегулированием

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_{уст}}{y_{уст}} \cdot 100\%,$$

допустимая величина которого обычно устанавливается на основании опыта эксплуатации той или иной САУ. В большинстве случаев считается запас устойчивости достаточным, если $\sigma \leq 10 \div 30\%$. Но в некоторых случаях требуется полное отсутствие σ (монотонный переходный процесс), а может допускаться и 50-70%.

Быстродействие системы может определяться по длительности переходного процесса t_n , после которого

$$|y(t) - y_{уст}| \leq \Delta,$$

где Δ - допустимая ошибка, принимаемая обычно $(0,01-0,05) y_{уст}$.

Иногда задается допустимое число колебаний m за t_n , которое допускается обычно 1-2. Но иногда требуется, чтобы $m = 0$, а может и допускаться до 3-4.

Графически требования к запасу устойчивости и быстродействию сводятся к тому, чтобы $y(t)$ при $g(t) = 1(t)$ не выходила из области допустимых отклонений управляемой величины $y(t)$ в переходном процессе (рис. 4.6).

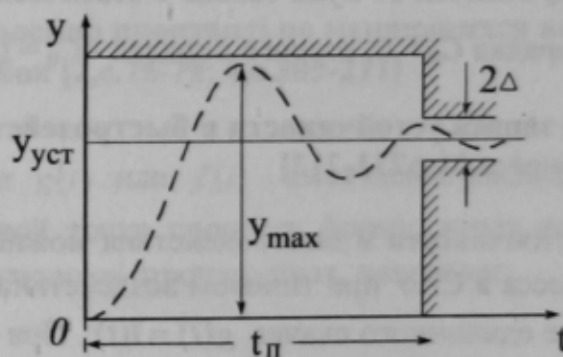


Рисунок 4.6 – Область допустимых отклонений управляемой величины

К сожалению, способов точной оценки перечисленных показателей качества переходного процесса без решения соответствующих дифференциальных уравнений САУ не существует. Поэтому используются приближенные и косвенные методы оценки процессов управления не требующие построения кривой переходного процесса.

4.6 Приближенная оценка качества переходного процесса по частотным характеристикам [2,с.112-119; 4,с.213-216; 223-233]

Прежде чем говорить о частотных оценках, установим связь между частотными характеристиками системы и качеством переходного процесса.

Рассмотрим переходный процесс $y(t)$ при $g(t) = 1(t)$.

В изображении по Лапласу

$$Y(p) = \Phi(p) \cdot G(p), \quad G(p) = \frac{1}{p},$$

где $\Phi(p)$ - главная передаточная функция замкнутой системы.

Подставив $p = j\omega$, запишем выражение для обратного преобразования Фурье (интеграл Фурье):

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(j\omega)}{j\omega} \cdot e^{j\omega t} d\omega,$$

где $\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ - АФЧХ замкнутой системы, имеющая вещественную $P(\omega)$ и мнимую $Q(\omega)$ частотные характеристики замкнутой системы.

Установившиеся значения $y_{уст} = P(0)$. Тогда

$$y(t) - P(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(j\omega) - P(0)}{j\omega} \cdot e^{j\omega t} d\omega.$$

Заменив $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ и подставив $\Phi(j\omega)$, получим выражение, предварительно отбросив мнимую часть (т.к. $y(t)$ вещественно) его:

$$y(t) - P(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} [P(\omega) \sin \omega t + Q(\omega) \cos \omega t - P(0) \sin \omega t] d\omega.$$

Подынтегральное выражение является четной функцией. Поэтому можно изменить пределы интегрирования на $(0, \infty)$ и удвоить результат. Кроме того:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{P(0)}{2}.$$

Тогда получаем:

$$y(t) = \frac{P(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (4.11)$$

Поскольку даны нулевые начальные условия, то нулевые значения функции распространяются и на $t < 0$. Поэтому подставив в (4.11) вместо t величину $-t$, получим:

$$0 = \frac{P(0)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (4.12)$$

Складывая и вычитая (4.11) и (4.12) соответственно получим:

$$y(t) = P(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega,$$

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (4.13)$$

Последняя формула (4.13) и используется для частотных оценок качества переходного процесса.

Частотным способом можно определить и весовую (импульсную переходную) функцию замкнутой системы. Если переходной процесс $y(t)$ определен при $g(t) = l(t)$, то $\omega_y(t) = \frac{dy}{dt}$. Дифференцируя (4.13), найдем:

$$\omega_y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega.$$

Существует приближенный способ вычисления по этой формуле. Аналогично находится $\omega_f(t)$. Зная $\omega_y(t)$ и $\omega_f(t)$ можно определить вынужденную часть процесса управления при любых воздействиях $g(t)$ и $f(t)$. Используя интеграл свертки:

$$y_s(t) = \int_0^t g(t-\tau) \omega_y(\tau) d\tau + \int_0^t f(t-\tau) \omega_f(\tau) d\tau.$$

4.6.1 Приближенная оценка переходного процесса по вещественной частотной характеристике

Эта оценка возможна на основании известной связи (4.13):

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega,$$

где $P(\omega) = \operatorname{Re} \Phi(j\omega)$ - вещественная частотная характеристика.

При этом предполагается, что переходный процесс $y(t)$ вызван скачком входного воздействия $g(t) = 1(t)$.

Анализ выражения (4.13) позволяет судить о переходном процессе по виду вещественной частотной характеристики $P(\omega)$. Рассмотрим без доказательств некоторые признаки, по которым можно судить о переходном процессе по $P(\omega)$.

Начальная часть $P(\omega)$ в основном влияет на конец переходной характеристики, а хвост $P(\omega)$ - на начальную часть переходного процесса. При оценке переходного процесса рассматривают интервал существенных частот $0 \leq \omega \leq \omega_{сч}$, выше которого $P(\omega)$ имеет пренебрежимо малое значение (рис. 4.7).

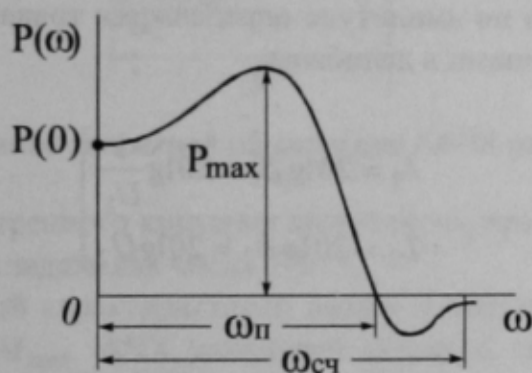


Рисунок 4.7 – График вещественной частотной характеристики

Установившееся значение регулируемой величины в о.е. при $1(t)$ на входе равно начальной ординате вещественной частотной характеристики: $y_{уст} = P(0)$.

Длительность переходного процесса тем меньше, чем больше интервал существенных частот. Имеет место неравенство $t_n > \pi / \omega_n$, где ω_n - интервал положительности $P(\omega)$.

Если $P(\omega)$ в интервале до $\omega_{сч}$ является положительной и невозрастающей, то σ в переходном процессе может не быть, а если будет, то не более 18%. В этом случае:

$$\frac{\pi}{\omega_{сч}} < t_n < \frac{4\pi}{\omega_{сч}}.$$

Переходный процесс будет монотонным ($\sigma = 0$), если $P(\omega)$ в интервале $0 \leq \omega \leq \omega_{сч}$ имеет отрицательную, убывающую по абсолютному значению производную.

Склонность системы к колебаниям тем больше, чем выше пик (P_{\max}) у $P(\omega)$. $P_{\max} \rightarrow \infty$, если система находится на колебательной границе устойчивости, что соответствует наличию пары чисто мнимых корней. При нахождении системы на аperiодической границе устойчивости, соответствующей наличию одного нулевого корня, значение $P(0) \rightarrow \infty$.

4.6.2 Определение запаса устойчивости и быстродействия по частотным характеристикам

Частотные показатели качества наиболее разработаны в отношении оценки запаса устойчивости, который определяется по удалению $W(j\omega)$ АФЧХ разомкнутой системы от точки $(-1; j0)$. Для этого вводятся понятия «запас устойчивости по амплитуде (модулю)» и «запас устойчивости по фазе».

Запас устойчивости по амплитуде определяется точками a и c (рис. 4.8) и соответственно двумя величинами в децибелах:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= 20 \lg \beta_1 = 20 \lg \frac{1}{U_1} \\ L_2 &= 20 \lg \beta_2 = 20 \lg U_2 \end{aligned} \right\}.$$

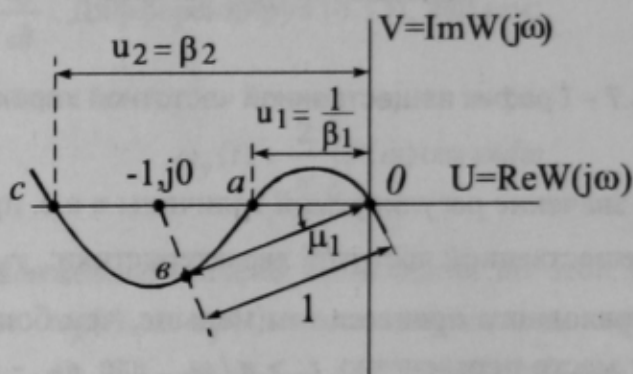


Рисунок 4.8 – Определение запаса устойчивости и быстродействия по АФЧХ разомкнутой системы

Запас устойчивости тем больше, чем больше L_1 и L_2 . Обычно в устойчивых системах они составляют 6-20 дБ. В случае абсолютной устойчивости имеет смысл только величина L_1 , а $L_2 \rightarrow \infty$.

Запасом устойчивости по фазе называется запас по фазе $\mu = 180^\circ + \psi$, где ψ - аргумент частотной передаточной функции разомкнутой системы, соответствующий модулю, равному единице (точка v) (рис. 4.8):

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 180^\circ + \psi_1 \\ \psi_1 &= \psi(\omega) \Big|_{A(\omega)=1} \end{aligned} \right\}.$$

В устойчивых системах μ составляет около 30-60°.

Иногда вместо дискретных точек, определяющих запас устойчивости системы (точки a, v, c на рис. 4.8) задают запретную область для АФЧХ разомкнутой системы, окружающую точку $(-1; j0)$. Она может быть построена по заданным значениям запасов устойчивости по фазе μ и модулю β (рис. 4.9).

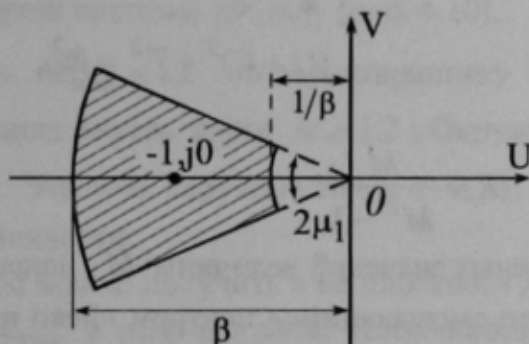


Рисунок 4.9 – Построение запретной области для АФЧХ разомкнутой системы

Недостатком рассмотренного критерия является то, что для определения запаса устойчивости необходимо задать два числа \square и \square .

Следующей частотной характеристикой является показатель колебательности – максимальное значение M_{\max} АЧХ замкнутой системы, при начальной ординате, равной единице (рис. 4.10): $M = |\Phi(j\omega)|$.

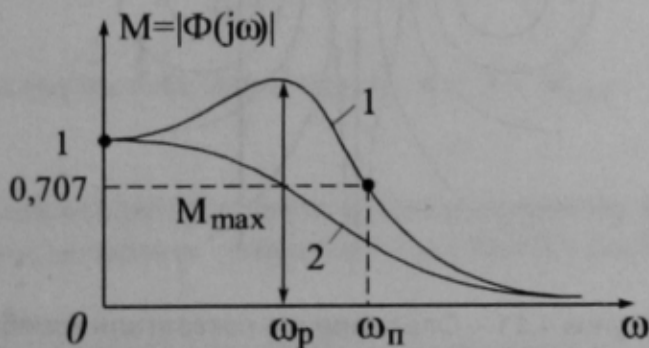


Рисунок 4.10 – Определение показателя колебательности системы по АЧХ замкнутой системы

Чем меньше запас устойчивости, тем больше склонность системы к колебаниям и тем выше резонансный пик. Допускаемое значение M_{\max} для устойчивых систем составляет 1,1-1,5.

Величина M_{\max} может быть определена по виду частотной характеристики разомкнутой цепи данной системы :

$$M = |\Phi(j\omega)| = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right| = \left| \frac{U + jV}{1+U + jV} \right| = \sqrt{\frac{U^2 + V^2}{(1+U)^2 + V^2}}.$$

Отсюда

$$U^2 + V^2 = M^2 [(1+U)^2 + V^2]$$

или

$$(U + C)^2 + V^2 = R^2,$$

$$\text{где } C = \frac{M^2}{M^2 - 1}, \quad R = \frac{M}{M^2 - 1}.$$

Значит, линии равных значений величины M , нанесенные на плоскости $W(j\omega)$, будут окружностями со смещающимся центром влево от начала координат на величину C и меняющимся радиусом R (рис. 4.11).

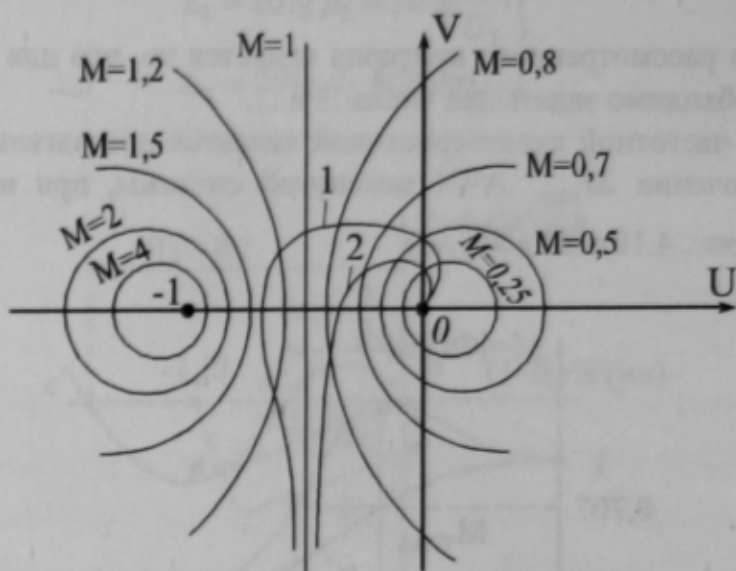


Рисунок 4.11 – Определение показателя колебательности системы по виду АЧХ разомкнутой системы

Задаваясь M от 1 до ∞ можно построить семейство таких окружностей. При $M = 1$ окружность вырождается в прямую линию, параллельную оси ординат и про-

ходящую слева от нее на расстоянии 0,5. При $M \rightarrow \infty$ окружность вырождается в точку $(-1; j0)$.

При $0 < M < 1$ получается семейство окружностей справа от линии $M = 1$ и симметрично с первыми. При $M = 0$ окружность вырождается в точку начала координат 0.

Имея такую диаграмму линий $M = \text{const}$, можно по заданной АФЧХ разомкнутой цепи $W(j\omega)$ легко определить M_{\max} замкнутой системы и построить всю АЧХ $M = |\Phi(j\omega)|$ замкнутой системы.

M_{\max} определяется по наименьшей окружности $M = \text{const}$, которой коснется АФЧХ. Для кривой 1 на рис. 4.11 это $M_{\max} = 1,2$. Точки пересечения АФЧХ разомкнутой цепи с окружностями будут определять точки АЧХ с соответствующими значениями ординат, равными M .

Изображенные на рисунке 4.11 характеристики $W(j\omega)$ 1 и 2 соответствуют характеристикам 1 и 2 замкнутой системы $|\Phi(j\omega)|$ (рис. 4.10).

Если необходимо иметь $M_{\max} < 1,2$, то характеристику 1 нужно скорректировать так, чтобы она не заходила внутрь круга $M = 1,2$. Окружность M_{\max} является запретной зоной для $W(j\omega)$. Эта зона окружает точку $(-1; j0)$ и обеспечивает получение заданного запаса устойчивости.

Такие же запретные зоны можно получить и на плоскости ЛАЧХ.

Удобство показателя M_{\max} в том, что запас устойчивости характеризуется одним числом.

Оценка быстродействия САУ может осуществляться по АЧХ замкнутой системы. Она определяется полосой пропускания, которая находится по частоте ω_n , при которой $A(\omega_n) = 0,707$ (см. рис. 4.10). Чем больше ω_n , тем выше быстродействие.

Если переходный процесс заканчивается за 1-2 колебания, то

$$t_n \approx (1 \div 2) \frac{2\pi}{\omega_p},$$

где ω_p - резонансная частота, при которой $A(\omega_p) = M_{\max}$.

4.7 Определение запаса устойчивости и быстродействия по расположению корней характеристического уравнения [2,с.119-126; 4,с.216-223]

Вид корней характеристического уравнения определяет характер переходного процесса.

Корневыми оценками называются такие, которые основываются на расположении корней характеристического уравнения замкнутой системы, т.е. полюсов $\Phi(p)$ замкнутой системы, а также и нулей этой передаточной функции.

Простейшая корневая оценка качества – степень устойчивости \square , определяемая расстоянием от мнимой оси (ординат) до ближайшего корня на плоскости корней p характеристического уравнения $D(p)=0$ замкнутой системы (рис. 4.12).

Если ближайшим является вещественный корень (рис. 4.12, а), то ему соответствует аperiodическая составляющая решения для переходного процесса $Ce^{-\eta t}$ (аperiodическая степень устойчивости \square).

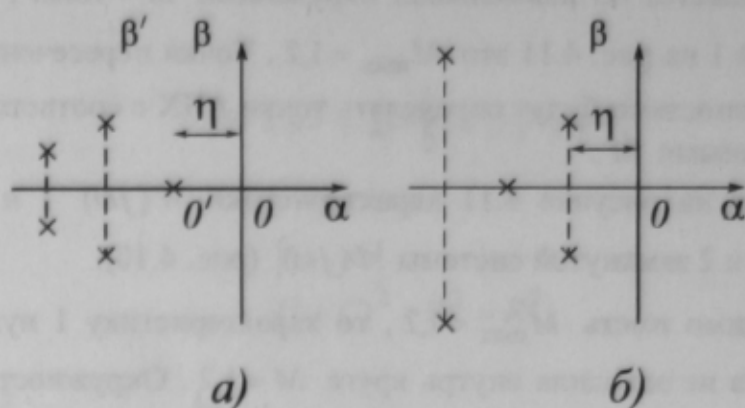


Рисунок 4.12 – Оценка запаса устойчивости по расположению корней характеристического уравнения

Время ее затухания $t_n \approx \frac{3}{\eta}$ характеризует общую длительность переходного процесса, т.е. все члены решения, соответствующие остальным корням, затухают быстрее.

Если ближайший к мнимой оси окажется пара комплексных корней (рис. 4.12, б), то доминирующая составляющая решения для переходного процесса:

$$Ce^{-\eta t} \sin(\beta t + \Psi)$$

будет колебательной (колебательная степень устойчивости), а оценка t_n остается прежней.

Процесс вычисления \square разбивается на два этапа:

- 1) составление смещенного уравнения,
- 2) применение критерия устойчивости к смещенному уравнению.

При этом сдвигается мнимая ось влево так, чтобы она прошла через первый, ближайший к ней корень. Для этого в характеристическое уравнение САУ подставляется $p = z - \eta$ и получается смещенное уравнение:

$$a_0(z-\eta)^n + a_1(z-\eta)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(z-\eta) + a_n = 0. \quad (4.14)$$

Раскрывая скобки и группируя подобные члены, получим:

$$a_0 z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_{n-1} z + A_n = 0, \quad (4.15)$$

где коэффициенты A_i являются функциями \square :

$$A_n = D(p)_{p=-\eta}; \quad A_{n-1} = \left[\frac{dD(p)}{dp} \right]_{p=-\eta}; \quad \dots \quad A_k = \frac{1}{(n-k)!} \left[\frac{d^{n-k} D(p)}{dp} \right]_{p=-\eta}.$$

Затем к смещенному уравнению (4.15) применяется условие границ устойчивости, например, по Гурвицу: аperiodическая - $A_n(\eta) = 0$; колебательная - $A_{n-1}(\eta) = 0$, откуда и вычисляется η .

Колебательность переходного процесса определяется величиной:

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|,$$

где α и β - вещественная и мнимая части корней характеристического уравнения.

μ характеризует быстроту затухания колебаний за каждый период. Паре комплексных корней $p_{1,2} = -|\alpha| \pm j\beta$ соответствует составляющая переходного процесса:

$$C_1 e^{-|\alpha|t} \sin(\beta t + \Psi).$$

Период колебаний равен: $T = \frac{2\pi}{\beta}$.

Через один период амплитуда $C_1 e^{-|\alpha|t}$ уменьшается до величины:

$$C_1 e^{-|\alpha|(t + \frac{2\pi}{\beta})} = C_1 e^{-|\alpha|t} \cdot e^{-|\alpha|\frac{2\pi}{\beta}} = C_1 e^{-|\alpha|t} \cdot e^{-\frac{2\pi}{\mu}}.$$

Затуханием за период называют величину: $\xi = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}$. Тогда

$$\mu = \frac{2\pi}{t_n \frac{1}{1-\xi}}.$$

Обычно в САУ при $\xi = 90\%$ $\mu = 1,57$.

Чем больше величина μ , тем слабее затухание колебаний в переходном процессе. Линия $\mu = const$ образует центральный угол на комплексной плоскости (рис. 4.13).

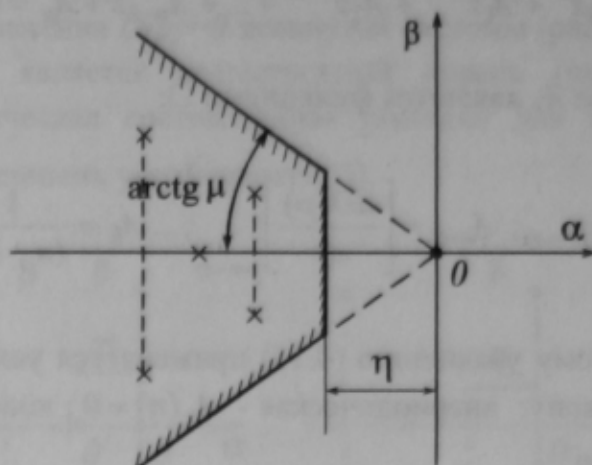


Рисунок 4.13 – Изображение величины колебательности на комплексной плоскости

Суммарное требование округленных значений η и μ приводит к области, изображенной на рис. 4.13, внутри которой должны лежать все корни характеристического уравнения замкнутой системы.

Для определения качества переходного процесса существенны не только корни $D(p) = 0$, определяемые левой частью дифференциального уравнения системы, но и величины, характеризующиеся правой ее частью. Известно, что :

$$Y(p) = \Phi(p) \cdot G(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} \cdot G(p),$$

где $\Phi(p)$ является дробно-рациональной функцией:

$$\Phi(p) = \frac{R(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Разложив числитель и знаменатель на множители, получим:

$$\Phi(p) = \frac{b_0 (p - p_1^0)(p - p_2^0) \dots (p - p_m^0)}{a_0 (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}.$$

Корни числителя $p^0 \dots p_m^0$ называют нулями $\Phi(p)$, т.е. в них она обращается в нуль. Корни знаменателя $p_1 \dots p_n$ являются корнями характеристического уравнения

и называются полюсами передаточной функции. В полюсе $\Phi(p)$ обращается в бесконечность.

Полюсы характеризуют левую часть, нули - правую часть дифференциального уравнения.

Для уменьшения амплитуд отклонений в переходном процессе желательно, чтобы нули $\Phi(p)$ располагались вблизи ее полюсов.

4.8 Интегральные оценки качества

Это такие оценки, которые одним числом оценивают и величины отклонений, и время затухания переходного процесса.

Для монотонного процесса интегральной оценкой может служить площадь под кривой переходного процесса (рис. 4.15):

$$J_1 = \int_0^{\infty} y(t) dt.$$

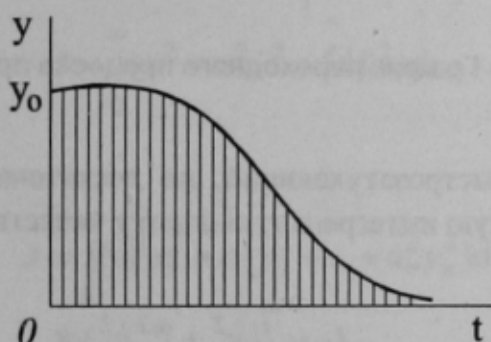


Рисунок 4.15 – График монотонного переходного процесса

Процесс тем лучше, чем меньше J_1 . Но для колебательного процесса такая оценка не годится, т.к. нижние площади будут вычитаться из верхних (рис. 4.16).

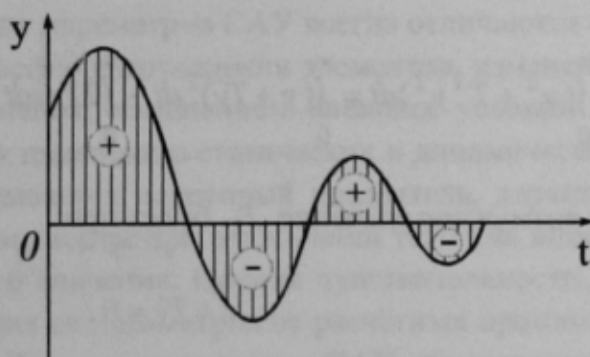


Рисунок 4.16 – Интегральная оценка колебательного процесса

По минимуму J_1 наилучшим оказался бы процесс с незатухающими колебаниями. Поэтому в общем случае принимают квадратичную интегральную оценку качества в виде:

$$J_2 = \int_0^{\infty} y^2(t) dt.$$

Стремление J_2 к нулю приближает кривую процесса к скачку, при котором уменьшается квадратичная площадь под кривой. Но это вызывает значительное увеличение скорости в начальной части процесса (рывок скорости) (рис. 4.17).

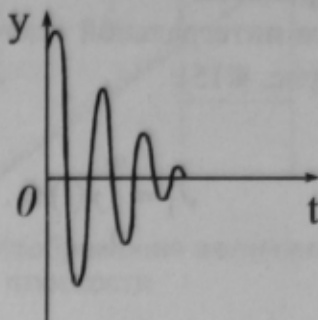


Рисунок 4.17 – График переходного процесса при уменьшении J_2

Чтобы получить быстро затухающий, но достаточно плавный процесс, вводят улучшенную квадратичную интегральную оценку качества:

$$J_k = \int_0^{\infty} (y^2 + T^2 \dot{y}^2) dt,$$

где T определяется в соответствии с заданием желаемых свойств переходного процесса и называется постоянной времени.

При стремлении уменьшить оценку J_k кривая переходного процесса приближается к экспоненте с желаемой T . Преобразуем:

$$J_k = \int_0^{\infty} (y^2 + T^2 \dot{y}^2) dt = \int_0^{\infty} (y + T\ddot{y})^2 dt - \int_0^{\infty} 2Ty\ddot{y} dt = \int_0^{\infty} (y + T\ddot{y})^2 dt + Ty_0^2.$$

Наименьшее возможное значение J_k будет при:

$$y + T\ddot{y} = 0.$$

Решение этого уравнения $y = y_0 e^{-\frac{t}{T}}$ и будет экспонентой (пунктирная линия), к которой приближается переходный процесс при стремлении уменьшить J_k (рис. 4.18).

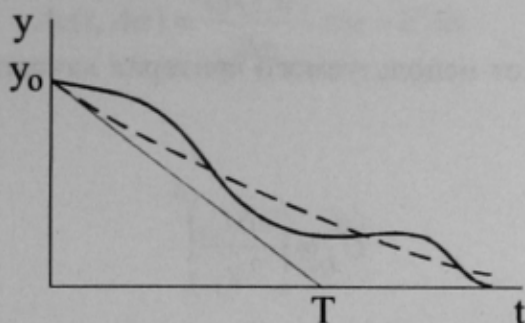


Рисунок 4.18 – График переходного процесса при уменьшении J_k

Применяют и другие виды интегральных оценок качества:

$$J = \int_0^{\infty} (y^2 + a^2 \dot{y}^2 + b^2 \ddot{y}^2) dt,$$

$$J = \int_0^{\infty} (a_1^2 y_1^2 + a_2^2 y_2^2 + \dots + a_n^2 y_n^2) dt,$$

где y_1, \dots, y_n - переменные, характеризующие состояние системы.

Интегральные критерии применяются в теории оптимальных САУ.

4.9 Чувствительность систем регулирования [4, с.241; 1, с.239]

Действительные значения параметров САУ всегда отличаются от расчетных. Это может быть вызвано неточностью изготовления элементов, изменением параметров в процессе эксплуатации, хранения, изменением внешних условий и т.д. Изменение параметров может привести к изменению статических и динамических свойств САУ.

Чувствительностью называется некоторый показатель, характеризующий свойство системы изменять режим работы при отклонении того или иного ее параметра от номинального, или исходного значения. Оценка чувствительности, т.е. оценка влияния на работу САУ отклонения ее параметров от расчетных производится с помощью функций чувствительности. Поскольку качество САУ оценивается с помощью временных или частотных критериев качества, то используются соответственно функции чувствительности временных характеристик и функции чувствительности частотных критериев качества.

Функции чувствительности представляют собой частные производные i -й координаты системы по вариации (изменению) j -го параметра:

$$U_{if} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^0,$$

или частные производные от используемого критерия качества J по j -ому параметру:

$$U_j = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha_j} \right)^0.$$

Индекс «0» означает, что частные производные должны приниматься равными значениям, соответствующим номинальным (расчетным) параметрам.

4.9.1 Функции чувствительности временных характеристик

С помощью этой функции оценивают влияние малых отклонений параметров системы от расчетных на временные характеристики системы (переходную, весовую функции и др.).

Пусть $y(t, \alpha + \Delta\alpha)$ - реакция выходной координаты системы на входное воздействие при отклонении параметра α от расчетного значения на величину $\Delta\alpha$. Представим эту реакцию в виде суммы двух слагаемых:

$$y(t, \alpha + \Delta\alpha) = y(t, \alpha) + \Delta y(t, \Delta\alpha), \quad (4.16)$$

где $y(t, \alpha)$ - основное движение, соответствующее исходной системе, у которой все параметры равны расчетным значениям и не имеют вариаций;

$y(t, \alpha + \Delta\alpha)$ - варьированное движение, соответствующее варьированной системе, у которой произошли вариации параметров;

$\Delta y(t, \Delta\alpha)$ - дополнительное движение системы, представляющей разность между варьированным и основным движением.

Разложим $y(t, \alpha + \Delta\alpha)$ в ряд Тейлора по $\Delta\alpha$ относительно $\Delta\alpha = 0$:

$$y(t, \alpha + \Delta\alpha) = y(t, \alpha) + \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Delta\alpha + \frac{\partial^2 y(t, \alpha)}{\partial^2 \alpha} \Delta\alpha^2 + \dots \quad (4.17)$$

Из сравнения формул (4.16) и (4.17) видно, что дополнительное движение описывается выражением:

$$\Delta y(t, \Delta \alpha) = \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial^2 y(t, \alpha)}{\partial^2 \alpha} \Delta \alpha^2 + \dots$$

которое при малых отклонениях α от расчетного значения примет вид:

$$\Delta y(t, \Delta \alpha) \approx \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Delta \alpha = U \Delta \alpha.$$

Функция:

$$U = \frac{\partial y(t, \alpha)}{\partial \alpha}$$

называется функцией чувствительности, с помощью которой можно легко оценить влияние изменения параметра системы на ее дополнительное движение, изменение временных характеристик системы.

Для определения функции чувствительности можно использовать передаточные функции системы. Изображение по Лапласу $y(t, \alpha)$ имеет вид:

$$Y(p, \alpha) = \Phi(p, \alpha) \cdot G(p).$$

Тогда:

$$U = L^{-1} \left[\frac{\partial Y(p, \alpha)}{\partial \alpha} \right] = L^{-1} \left[\frac{\partial \Phi(p, \alpha)}{\partial \alpha} G(p) \right] = L^{-1} [S_2^\Phi(p) G(p)], \quad (4.18)$$

где $S_2^\Phi(p) = \frac{\partial \Phi(p, \alpha)}{\partial \alpha}$ - функция чувствительности передаточной функции. Это выражение справедливо лишь в случае, если отклонение α от расчетного значения не изменит порядок характеристического уравнения системы. S_2^Φ характеризует изменение передаточной функции при изменении параметра α

$$\Delta \Phi(p, \alpha) = \frac{\partial \Phi(p, \alpha)}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha.$$

От функции S_2^Φ можно перейти к функции чувствительности и с помощью обратного преобразования Лапласа (4.18).

4.9.2 Функции чувствительности частотных критериев качества

В соответствии с критериями качества (показатель колебательности, запас устойчивости по фазе или амплитуде) используют функции чувствительности показателя колебательности, запаса устойчивости по фазе и т.д. С помощью этих функций оценивают чувствительность САУ к изменению параметров.

Если в системе произошли изменения ряда параметров $\Delta\alpha_j (j=1, \dots, m)$, то результирующее изменение некоторого используемого показателя качества:

$$\Delta J = \tilde{J} - J,$$

где \tilde{J} – варьированное значение показателя, а J – исходное значение. Это изменение можно подсчитать по формуле полного дифференциала:

$$\Delta J \approx \sum_{j=1}^m U_j \Delta\alpha_j.$$

Если известны максимально возможные отклонения $\Delta\alpha_{\max j}$, то при их независимости друг от друга, используя вероятностные методы, можно найти среднеквадратичный максимум отклонений показателя

$$\Delta J_{\max} = \sqrt{\sum_{j=1}^m (U_j \Delta\alpha_{\max j})^2}$$

и среднеквадратичный относительный максимум отклонений

$$\Delta_{\max} = \frac{\Delta J_{\max}}{J}.$$

Если заданы дисперсии отклонений параметров $D_j = M[(\Delta\alpha_j)^2]$ и они независимы, то можно найти дисперсии показателя качества

$$D_J = \sum_{j=1}^m U_j^2 D_j.$$

В качестве критериев оценки качества системы могут использоваться максимум ошибки, коэффициенты ошибок, оценки запаса устойчивости и быстродействия, интегральные оценки и т.п.

5 КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА И МЕТОДЫ ИХ СИНТЕЗА

5.1 Корректирующие устройства и их эквивалентность [2,с.129-134; 1,с.276-277]

Чтобы добиться желаемого качества процесса управления или регулирования, т.е. требуемой точности системы и качества переходного процесса, есть два способа:

- путем изменения параметров данной системы (при этом меняются коэффициенты уравнения и частотные характеристики);
- путем изменения структуры системы, введя дополнительные звенья – корректирующие устройства.

Введение корректирующих устройств позволяет не только улучшить точность системы и качество переходных процессов, но и сделать систему устойчивой.

Различают четыре основных вида корректирующих устройств:

- последовательные корректирующие устройства;
- параллельные корректирующие устройства;
- корректирующие устройства по внешнему воздействию;
- неединичная главная ОС.

Принятие того или иного типа корректирующих устройств (последовательных, параллельных или ОС) определяется возможностью и удобством их технического осуществления.

В линейных системах для корректирующего устройства одного типа можно подобрать эквивалентное корректирующее устройство другого типа. Эквивалентность означает, что присоединения к системе регулирования одного или другого корректирующего устройства образует полностью подобные системы. Для получения формул перехода от корректирующего устройства одного типа к другому типу необходимо приравнять результирующие передаточные функции.

$W(p) = W_o(p) \cdot W_{ПС}(p)$ – при последовательном типе;

$W(p) = W_o(p) + W_{ПР}(p)$ – при параллельном типе;

$W(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p) \cdot W_{ОС}(p)}$ – в виде ОС (отрицательной).

$$W_o(p) \cdot W_{ПС}(p) = W_o(p) + W_{ПР}(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p) \cdot W_{ОС}(p)},$$

где $W_o(p)$ – передаточная функция заданной части системы.

Отсюда можно получить пять формул перехода от передаточной функции корректирующего звена одного типа к передаточной функции звена другого типа:

$$W_{ПС}(p) = \frac{1}{1 + W_o(p) \cdot W_{ОС}(p)},$$

$$W_{\text{ПС}}(p) = \frac{W_o(p) + W_{\text{ПР}}(p)}{W_o(p)},$$

$$W_{\text{ПР}}(p) = W_o(p) \cdot [W_{\text{ПС}}(p) - 1],$$

$$W_{\text{ПР}}(p) = - \frac{W_o^2(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)}{1 + W_o(p) \cdot W_{\text{ос}}(p)},$$

$$W_{\text{ос}}(p) = \frac{1 - W_{\text{ПС}}(p)}{W_o(p) \cdot W_{\text{ПС}}(p)},$$

$$W_{\text{ос}}(p) = - \frac{W_{\text{П}}(p)}{W_o^2(p) + W_o(p) \cdot W_{\text{ПР}}(p)}.$$

Звенья последовательного типа удобно применять тогда, когда в системе регулирования используется электрический сигнал в виде напряжения постоянного тока.

Звенья параллельного типа удобно применять тогда, когда необходимо осуществить сложный закон регулирования с введением производных и интегралов от сигнала ошибки.

Обратные связи отличаются удобством технической реализации. Кроме того, если ОС охватывает участок цепи регулирования, содержащий нелинейность, то влияние этой нелинейности значительно уменьшается. ОС дают значительно лучший эффект в тех случаях, когда из-за воздействия внешних факторов (время, температура и т.п.) меняется коэффициент усиления части цепи регулирования, охватываемой отрицательной ОС.

5.2 Последовательные корректирующие устройства [2, с.129-134]

Последовательные корректирующие устройства (корректирующие фильтры) могут описываться различными передаточными функциями $W_{\kappa}(p)$.

Общая передаточная функция разомкнутой цепи (рис. 5.1) будет:

$$W(p) = W_{\kappa}(p) \cdot W_o(p),$$

а во втором варианте (рис. 5.2)

$$W_{\kappa} = W_{o1}(p) + W_{\kappa1}(p),$$

где нулями отмечены передаточные функции заданных частей системы.

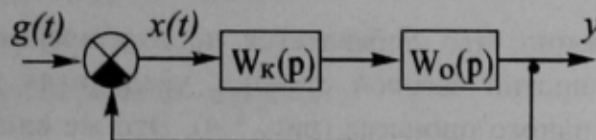


Рисунок 5.1 – Система с последовательным корректирующим устройством

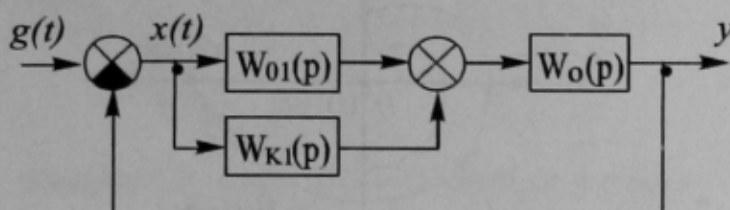


Рисунок 5.2 – Один из вариантов цепи с последовательным корректирующим устройством

Рассмотрим некоторые типовые последовательные корректирующие устройства.

5.2.1 Введение производной от ошибки

Это простейший метод улучшения качества переходного процесса.

Технически осуществляется различными устройствами. Например, дифференциальное звено, в том числе и с инерционностью в виде $\frac{T(p)}{T_1 p + 1}$ (рис. 5.3). Регулирование осуществляется как по ошибке, так и по ее производной.

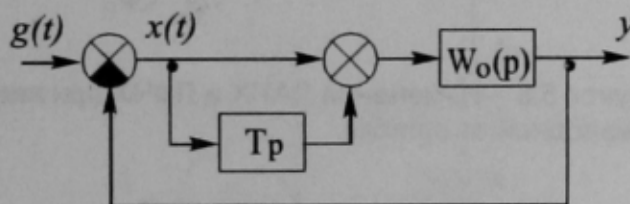


Рисунок 5.3 – Введение производной от ошибки

Передаточная функция разомкнутой цепи с идеальной производной будет:

$$W(p) = (Tp + 1) \cdot W_o(p).$$

Заменяв $p \rightarrow j\omega$ получим АЧХ и ФЧХ

$$A(\omega) = A_k(\omega) \cdot A_o(\omega) = \sqrt{T^2 \omega^2 + 1} \cdot A_o(\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_k(\omega) + \varphi_o(\omega) = \arctg T\omega + \varphi_o(\omega).$$

При этом существенно, что добавляется положительная фаза. Радиус-вектор АФЧХ поворачивается против часовой стрелки, увеличивая запас устойчивости и улучшая качество переходного процесса (рис. 5.4). Это же видно из ЛАЧХ и ЛФЧХ (рис. 5.5).

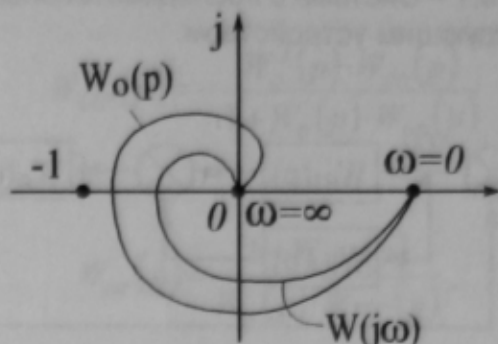


Рисунок 5.4 – Изменения АФЧХ при введении производной от ошибки

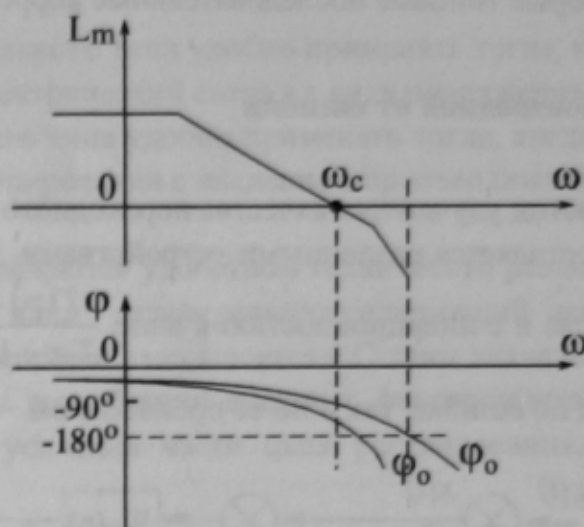


Рисунок 5.5 – Изменения ЛАЧХ и ЛФЧХ при введении производной от ошибки

Введение производной от ошибки может служить стабилизирующим средством, превращая неустойчивую систему в устойчивую. Если бы точка $(-1, j 0)$ лежала бы внутри АФЧХ $W_o(j\omega)$, а $W(j\omega)$ уже могла бы не охватывать ее.

5.2.2 Увеличение общего коэффициента усиления K

Увеличение общего коэффициента усиления K разомкнутой цепи является методом повышения точности системы. При этом уменьшаются все установившиеся ошибки системы (см. гл. 4). Увеличение K осуществляется введением последовательно в общую цепь усилительного звена. Но увеличения K ведет к ухудшению условий

устойчивости, а значит и качества переходного процесса. Поэтому часто это делается одновременно с введением производной.

5.2.3 Введение интеграла от ошибки

Введение интеграла от ошибки является методом создания или повышения порядка астатизма системы, а значит и увеличение ее точности (рис. 5.6).

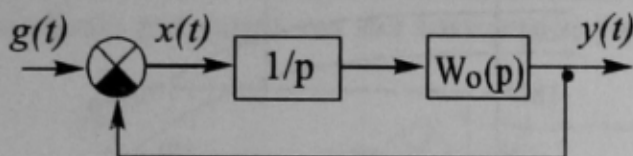


Рисунок 5.6 – Введение интеграла от ошибки

Передаточная функция в этом случае

$$W(p) = \frac{W_o(p)}{P}.$$

Подставив $p \rightarrow j\omega$ получим

$$A(\omega) = \frac{A_o(\omega)}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_o(\omega) - 90^\circ.$$

Из-за поворота фазы на -90° ухудшаются условия устойчивости и качество переходного процесса (рис. 5.7 и 5.8). Это может привести и к неустойчивости замкнутой системы, если точка $(-1, j0)$ окажется внутри АФЧХ $W_o(j\omega)$ и не охватывает ее.

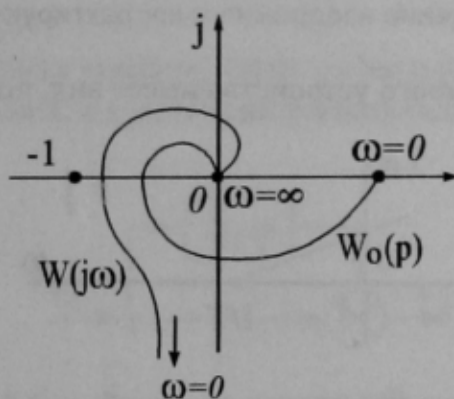


Рисунок 5.7 – Изменение АФЧХ при введении интеграла от ошибки

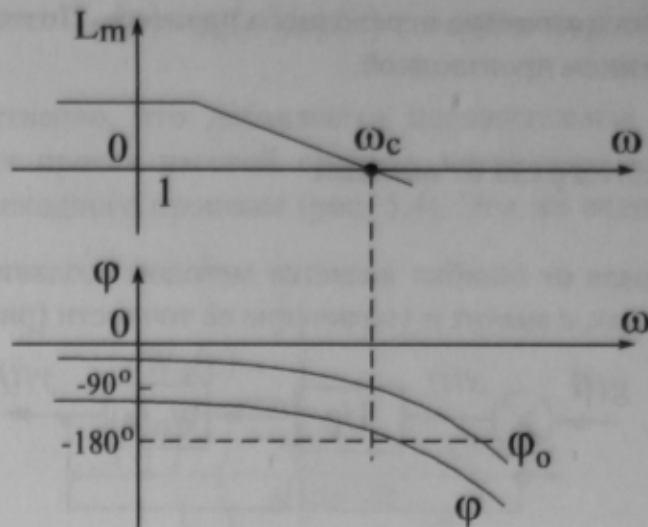


Рисунок 5.8 – Изменения ЛАЧХ и ЛФЧХ при введении интеграла от ошибки

5.2.4 Изодромное корректирующее устройство

Это корректирующее устройство имеет передаточную функцию вида:

$$W_K(p) = \frac{Tp + 1}{Tp}$$

объединяя в себе введение интеграла и производной (рис. 5.9). Оно позволяет избежать недостатков предыдущего устройства и получать необходимый порядок астатизма системы, сохраняя устойчивость и качество ее.

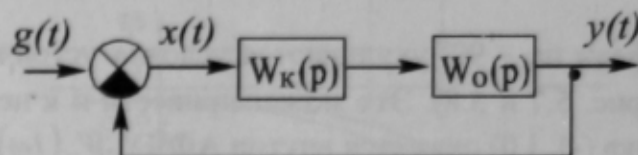


Рисунок 5.9 – Введение изодромного корректирующего устройства

ЛАЧХ и ЛФЧХ изодромного устройства имеет вид, показанный на рис. 5.10.

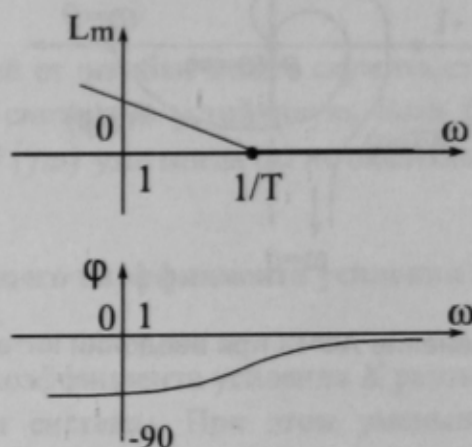


Рисунок 5.10 – ЛАЧХ и ЛФЧХ изодромного устройства

Изменяется низкочастотная часть АЧХ, влияющая на точность системы (повышает ее), а отрицательный сдвиг фазы в части, существенной для условий устойчивости, невелик.

Передаточную функцию изодромного устройства можно представить в виде:

$$W_K(p) = \frac{Tp + 1}{Tp} = 1 + \frac{1}{Tp},$$

т.е. структурно это будет выглядеть так как показано на рис. 5.11.

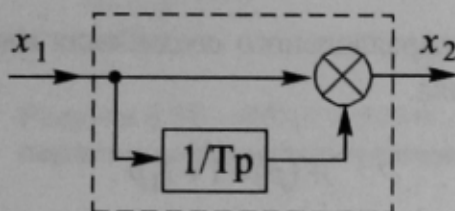


Рисунок 5.11 – Структурная схема цепи с изодромным корректирующим устройством

Значит, если при введении интеграла регулирование в системе производится не по величине ошибки x , а только по интегралу от нее, то при изодромном устройстве получается регулирование по ошибке и по интегралу.

5.3 Параллельные корректирующие устройства [2,с.134-139]

В качестве параллельных корректирующих устройств чаще всего используются интегрирующие и дифференцирующие звенья, которые включаются в цепь регулирования параллельно основному сигналу. Эти звенья удобно применять при использовании сложных законов управления, когда наряду с основным сигналом вводятся его производные или интегралы.

Введение интегрирующих звеньев используется для увеличения точности системы в установившихся режимах, т.е. снижения установившейся ошибки (рис. 5.12).

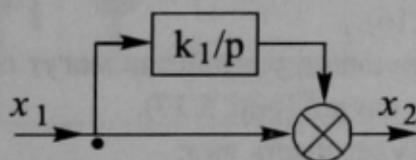


Рисунок 5.12 – Введение параллельного интегрирующего корректирующего устройства

Этот вопрос был рассмотрен ранее в связи с повышением точности САУ посредством использования изодромных устройств.

Введение дифференцирующего звена повышает запас устойчивости системы (рис. 5.13).

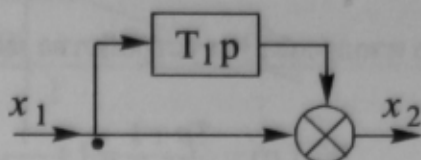
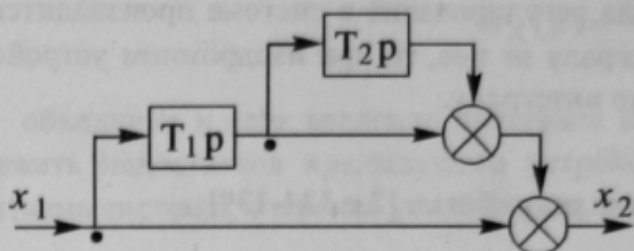


Рисунок 5.13 – Введение параллельного дифференцирующего корректирующего устройства

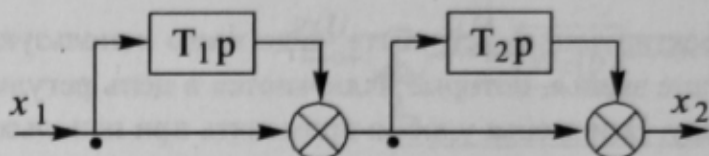
Передаточная функция параллельного соединения идеального дифференцирующего звена и основного сигнала

$$W(p) = 1 + T_1 p.$$

Введение второй производной от основного сигнала дополнительно к первой осуществляется обычно по каскадным схемам с соответствующими передаточными функциями (рис. 5.14):



$$W(p) = 1 + T_1 p + T_1 T_2 p^2$$



$$W(p) = 1 + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2$$

Рисунок 5.14 – Введение второй производной от основного сигнала

Введение параллельных интегрирующих звеньев соответствуют поднятию нижних частот (рис. 5.15), а введение параллельных дифференцирующих звеньев – поднятию верхних частот (рис. 5.16).

Параллельные корректирующие устройства могут осуществляться в виде дополнительных местных обратных связей (рис. 5.17).

Передаточная функция будет иметь вид:

$$W(p) = \frac{W_{ol}(p) \cdot W_o(p)}{1 + W_{ol}(p) \cdot W_{oc}(p)}.$$

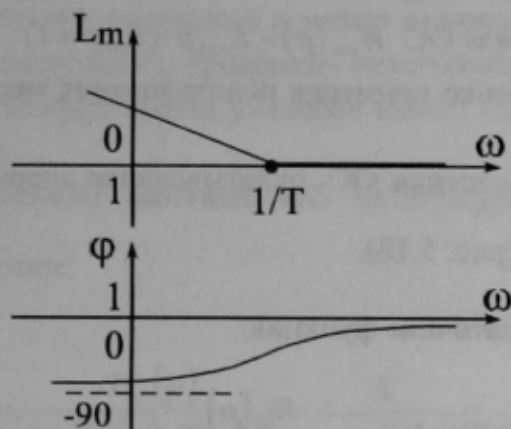


Рисунок 5.15 – ЛАЧХ и ЛФЧХ при введении параллельного интегрирующего звена

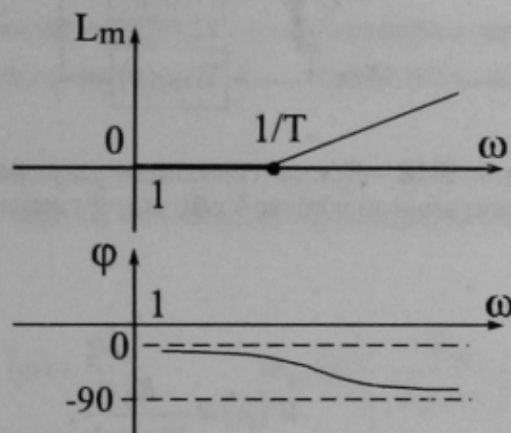


Рисунок 5.16 – ЛАЧХ и ЛФЧХ при введении параллельного дифференцирующего звена

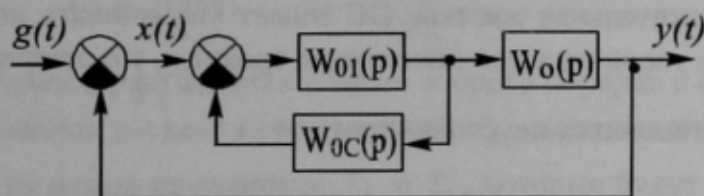


Рисунок 5.17 – Параллельные корректирующие устройства в виде местных обратных связей

Основные виды корректирующих местных ОС:

- жесткая ОС $W_{oc} = K_{oc}$;
- инерционная жесткая ОС $W_{oc}(p) = K_{oc} / (T_{oc}p + 1)$;

- гибкая ОС $W_{oc}(p) = K_{oc}p$;
- инерционная гибкая ОС $W_{oc}(p) = K_{oc}p / (T_{oc}p + 1)$.

Рассмотрим несколько примеров использования местных ОС в качестве корректирующих устройств.

Положительная жесткая ОС, охватывающая апериодическое звено (инерционное) с $W_o(p) = \frac{K}{Tp + 1}$ (рис. 5.18).

Тогда общая передаточная функция:

$$W(p) = \frac{W_o(p)}{1 - W_{oc}(p) \cdot W_o(p)} = \frac{K}{Tp + 1 - KK_{oc}}$$

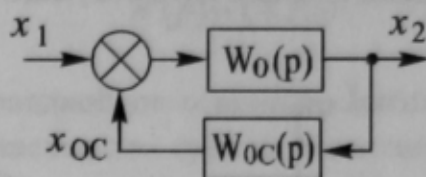


Рисунок 5.18 – Корректирующее устройство в виде положительной жесткой обратной связи

или

$$W(p) = \frac{K_1}{T_1p + 1},$$

где

$$K_1 = \frac{K}{1 - KK_{oc}}, \quad T_1 = \frac{T}{1 - KK_{oc}}.$$

Значит положительная жесткая ОС может увеличивать коэффициент усиления, но одновременно увеличивается постоянная времени, т.е. инерционность звена, и при $K_{oc} > \frac{1}{K}$ звено становится неустойчивым.

Отрицательная жесткая ОС, охватывающая апериодическое звено дает общую передаточную функцию:

$$W(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_{oc}(p) \cdot W_o(p)} = \frac{K}{Tp + 1 + KK_{oc}} = \frac{K_2}{T_2p + 1},$$

где $K_2 = \frac{K}{1 + KK_{oc}}, \quad T_2 = \frac{T}{1 + KK_{oc}}.$

Следовательно, жесткая отрицательная ОС уменьшает инерционность звена, улучшая этим качество переходного процесса и может оказать стабилизирующее действие (подобно введению производной), превращая неустойчивую замкнутую систему в устойчивую. Уменьшение коэффициента усиления может быть скомпенсировано за счет других звеньев системы.

При охвате отрицательной жесткой ОС интегрирующего звена, т.е. при
 $W_o(p) = \frac{K}{p}$, $W_{oc} = K_{oc}$, получим:

$$W(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p) \cdot W_{oc}(p)} = \frac{K}{p + KK_{oc}} = \frac{K_3}{T_3 p + 1},$$

где $K_3 = \frac{1}{K_{oc}}$, $T_3 = \frac{1}{KK_{oc}}$.

Т.е. под действием жесткой обратной связи теряются интегрирующие свойства звена, и оно превращается в инерционное с K_3 , определяемым целиком ОС. T_3 будет мала при большом K звена.

Далее будут рассматриваться только отрицательные ОС.

Инерционная жесткая ОС, охватывающая интегрирующее звено.

При этом

$$W_o(p) = \frac{K}{p}; \quad W_{oc}(p) = \frac{K_{oc}}{T_{oc}p + 1}.$$

Тогда

$$W(p) = \frac{K(T_{oc}p + 1)}{T_{oc}p^2 + p + KK_{oc}} = \frac{K_4(T_{oc}p + 1)}{T_4^2 p^2 + T_5 p + 1},$$

где $K_4 = \frac{1}{K_{oc}}$, $T_4^2 = \frac{T_{oc}}{KK_{oc}}$, $T_5 = \frac{1}{KK_{oc}}$.

Интегрирующее звено превращается в звено второго порядка с введением производной. K_4 и интенсивность введения производной T_{oc} целиком определяется ОС, и первичный K влияет на новые постоянные T_4 и T_5 , которые будут тем меньше, чем больше K . Поэтому при большом K охват интегрирующего звена инерционной жесткой ОС эквивалентен усилительному звену с введением производной. При этом

$$W(p) \approx \frac{T_{oc}p + 1}{K_{oc}}.$$

Отсюда видно позитивное влияние инерционной ОС на качество переходного процесса в системе в целом.

Гибкая ОС. При охвате его колебательного звена, т.е

$$W_o(p) = \frac{K}{T_2^2 p^2 + 2T_1 T_2 p + 1}, \quad W_{oc} = K_{oc} p$$

имеем

$$W(p) = \frac{K}{T_2^2 p^2 + 2T_3 T_2 p + 1},$$

где $2T_3 T_2 p = 2T_1 T_2 p + K K_{oc} p$, $T_3 = T_1 + \frac{K K_{oc}}{2T_2}$.

При этом увеличивается демпфирующее свойство колебательного звена ($T_3 > T_1$), причем не меняется коэффициент усиления K . Процесс становится менее колебательным и может превратиться в апериодический (при $T_3 \geq 1$).

Охват апериодического звена гибкой ОС увеличивает только его инерционность.

При охвате инерционного интегрирующего звена гибкой ОС

$$W_o(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)}; \quad W_{oc}(p) = K_{oc} p$$

имеем

$$W(p) = \frac{K}{p(Tp + 1) + K K_{oc} p} = \frac{K_1}{p(T_1 p + 1)},$$

где

$$T_1 = \frac{T}{1 + K K_{oc}}, \quad K_1 = \frac{K}{1 + K K_{oc}},$$

т.е сохраняется то же интегрирующее звено, но с уменьшенной инерционностью.

Инерционная гибкая ОС. При охвате инерционного интегрирующего звена, т.е:

$$W_o(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)}, \quad W_{oc}(p) = \frac{K_{oc} p}{T_{oc} p + 1},$$

имеем

$$W(p) = \frac{K(T_{oc} p + 1)}{p[TT_{oc} p^2 + (T + T_{oc})p + 1 + K K_{oc}]} = \frac{K_1(T_{oc} p + 1)}{p(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)},$$

где

$$T_2^2 = \frac{TT_{oc}}{1 + KK_{oc}}, \quad K_1 = \frac{K}{1 + KK_{oc}}, \quad T_1 = \frac{T + T_{oc}}{1 + KK_{oc}}.$$

При сохранении интегрирующего свойства звена получается эффект введения производной, т.е. интегрирующее звено становится изодромным, и новые T_2 и T_1 могут быть малыми за счет большого K . В последнем случае имеем:

$$K_1 \approx \frac{1}{K_{oc}}, \quad W(p) \approx \frac{T_{oc}p + 1}{K_{oc}p}.$$

5.4 Корректирующие устройства по внешнему воздействию Инвариантность [1, с.263-268; 2, с.139-142]

Основной принцип автоматического управления и регулирования состоит в формировании управляющего сигнала по величине ошибки x (с использованием интегралов и производных от x). Если же вводится корректирующее устройство по внешнему воздействию, то получается комбинированное управление – по ошибке и по внешнему воздействию.

Путем введения коррекции по внешнему воздействию удастся теоретически свести величину установившейся ошибки к нулю при любой форме внешнего воздействия. Это свойство называется – инвариантностью системы по отношению к внешнему воздействию.

5.4.1 Корректирующее устройство по задающему воздействию

При этом дополнительно к управлению по ошибке $x(t)$ вводится управление по задающему воздействию $g(t)$ через некоторую передаточную функцию $W_k(p)$. Структурная схема системы с комбинированным управлением будет выглядеть, как показано на рис. 5.19.

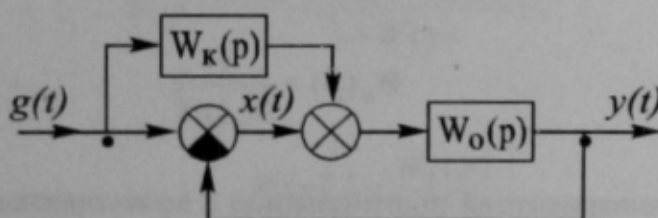


Рисунок 5.19 – Введение управления по задающему воздействию

Тогда выходная величина выразится в виде:

$$y(t) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p)} [1 + W_k(p)] \cdot g(t). \quad (5.1)$$

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы для регулируемой величины будет равна:

$$\Phi_z(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p)} [1 + W_k(p)],$$

а

$$y(t) = \Phi_z(p) \cdot g(t).$$

В случае отсутствия регулирования по задающему воздействию, т.е. при $W_k(p) = 0$, регулируемая величина связана с $g(t)$ через передаточную функцию замкнутой системы:

$$y(t) = \Phi(p) \cdot g(t) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p)} \cdot g(t). \quad (5.2)$$

Из сопоставления формул (5.1) и (5.2) видно, что введение регулирования по задающему воздействию не меняет характеристического уравнения системы, т.к. знаменатели $\Phi_z(p)$ и $\Phi(p)$ одинаковы. Это означает, что не будет нарушаться не только условия устойчивости, но и сохраняется оценка качества переходного процесса, базирующаяся на использовании корней характеристического уравнения.

Эквивалентная передаточная функция по ошибке будет равна:

$$\Phi_{zx}(p) = 1 - \Phi_z(p) = \frac{1 - W_k(p)W_o(p)}{1 + W_o(p)}.$$

Отсюда можно найти условие полной инвариантности системы регулирования по задающему воздействию, при котором установившаяся ошибка будет равна нулю при любой форме $g(t)$ ($\Phi_z(p) = 1$, а $\Phi_{zx}(p) = 0$ в этом случае):

$$W_k(p) = \frac{1}{W_o(p)}.$$

САР является инвариантной по отношению к возмущающему воздействию, если после завершения переходного процесса, определяемого начальными условиями, регулируемая величина и ошибка системы не зависят от этого воздействия.

Структурная схема системы с комбинированным управлением может быть заменена эквивалентной ей обычной схемой САУ, работающей по ошибке $x(t)$, с эквивалентной передаточной функцией разомкнутой системы, как показано на рис. 5.20.

$$W_3(p) = \frac{\Phi_3(p)}{1 - \Phi_3(p)} = \frac{W_o(p)[1 + W_k(p)]}{1 - W_k(p)W_o(p)}.$$

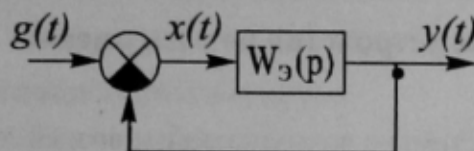


Рисунок 5.20 – Эквивалентная схема системы с управлением по задающему воздействию

В некоторых случаях сигнал по задающему воздействию может вводиться в некоторую точку внутри канала регулирования (рис. 5.21).

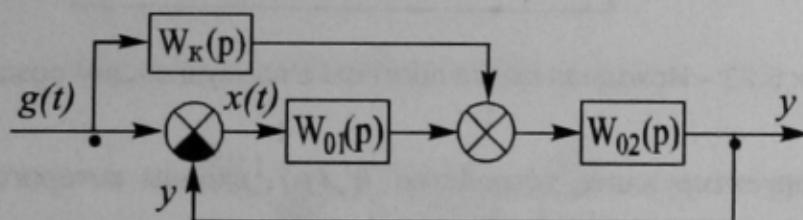


Рисунок 5.21 – Возможный вариант схемы системы с управлением по задающему воздействию

В этом случае

$$\Phi_3(p) = \frac{W(p) \left[1 + \frac{W_k(p)}{W_{o1}(p)} \right]}{1 + W(p)};$$

$$\Phi_{x3}(p) = \frac{1 - W_k(p) \cdot W_{o2}(p)}{1 + W(p)};$$

$$W_3(p) = \frac{W(p) \left[1 + \frac{W_k(p)}{W_{o1}(p)} \right]}{1 - W_k(p)W_{o2}(p)},$$

где $W(p) = W_{o1}(p) \cdot W_{o2}(p)$ - передаточная функция разомкнутой системы (в случае $W_k(p) = 0$).

Условие полной инвариантности в этом случае:

$$W_k(p) = \frac{1}{W_{o2}(p)}.$$

5.4.2 Корректирующие устройства по возмущению

Пусть задана схема системы с возмущающим воздействием (рис. 5.22).

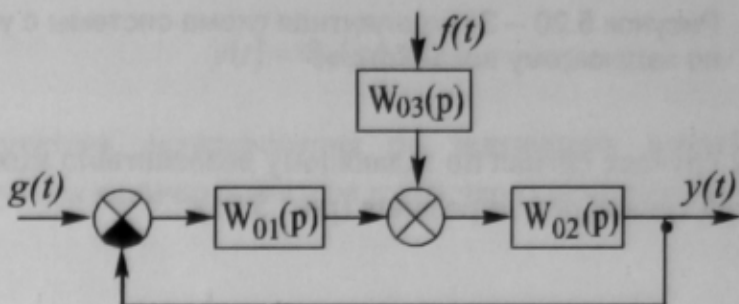


Рисунок 5.22 – Исходная схема системы с возмущающим воздействием

Введем корректирующее устройство $W_k(p)$, входом которого является возмущающее воздействие f (рис. 5.23).

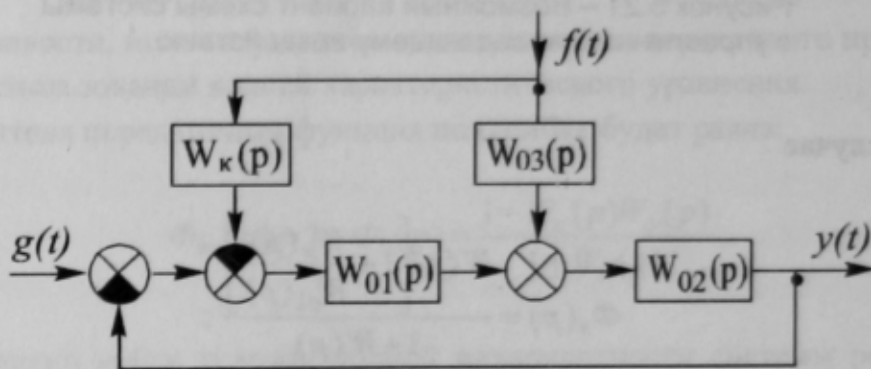


Рисунок 5.23 – Введение корректирующего устройства по возмущающему воздействию

Тогда передаточная функция замкнутой системы для регулируемой величины $y(t)$ по $f(t)$ равна:

$$\Phi_f(p) = \frac{W_{o2}(p)[W_{o3}(p) - W_k(p) \cdot W_{o1}(p)]}{1 + W_{o1}(p) \cdot W_{o2}(p)}.$$

Условие полной инвариантности по $f(t)$ имеет вид:

$$W_{\kappa}(p) = \frac{W_{o3}(p)}{W_{o1}(p)}.$$

САР является инвариантной по отношению к возмущающему воздействию, если после завершения переходного процесса, определенного начальными условиями, регулируемая величина и ошибка системы не зависит от этого воздействия.

5.5 Неединичные главные обратные связи

Этот тип корректирующего устройства применяют для уменьшения ошибки, вызванной задающим воздействием в замкнутой системе регулирования.

Введем в главную ОС, которая обычно равна единице, устройство с передаточной функцией $W_{\kappa}(p)$ (рис. 5.24). В этом случае на входе системы $g(t)$ сравнивается не непосредственно с выходной величиной $y(t)$, как обычно, а с некоторой величиной $z(t)$.

$$z(t) = W_{\kappa}(p) \cdot y(t).$$

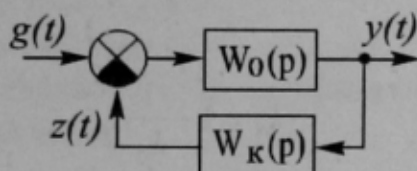


Рисунок 5.24 – Введение неединичных главных обратных связей

Тогда

$$y(t) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p)W_{\kappa}(p)} g(t).$$

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы (рис. 5.25):

$$\Phi_{\Sigma}(p) = \frac{W_o(p)}{1 + W_o(p)W_{\kappa}(p)} = \frac{W_{\Sigma}(p)}{1 + W_{\Sigma}(p)};$$

$$W_{\Sigma}(p) = \frac{W_o(p)}{1 - [1 - W_{\kappa}(p)]W_o(p)}.$$

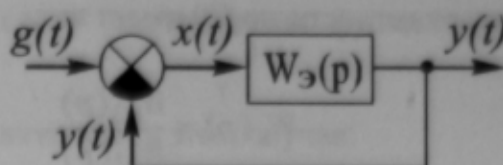


Рисунок 5.25 – Эквивалентная схема замкнутой системы с неединичной главной обратной связью

Для полной инвариантности системы требуется $y(t) = g(t)$, т.е. $\Phi_y(p) = 1$. Отсюда:

$$W_k(p) = \frac{W_o(p) - 1}{W_o(p)} = 1 - \frac{1}{W_o(p)}. \quad (5.3)$$

Из выражения видно, насколько $W_k(p)$ должно отличаться от “обычной” единицы, чтобы система стала инвариантной, т.е. воспроизводила любое $g(t)$ без установившейся ошибки.

При этом способе корректировки, как видно из формулы для $\Phi_y(p)$, существенно меняется характеристическое уравнение замкнутой системы. Поэтому нужно следить, чтобы получалось желаемое качество переходного процесса.

В статическом режиме ($p=0$) в системе без астатизма, как видно из равенства (5.3) имеем:

$$k_k = 1 - \frac{1}{k_o}. \quad (5.4)$$

Значит, если ввести в главную ОС системы коэффициент усиления k_k согласно формуле (5.4), то система превращается в астатическую ($y(t) = g(t)$) без введения интегрирующего звена.

Содержание

Введение.....	3
1 Основные задачи и принципы управления.....	5
1.1 Общие понятия и определения.....	5
1.2 Принципы управления и регулирования.....	8
1.2.1 Принцип разомкнутого управления.....	9
1.2.2 Принцип компенсации (управление по возмущению).....	9
1.2.3 Принцип обратной связи. Регулирование по отклонению.....	10
1.3 Режимы работы АС. Характеристика процесса управления.....	12
1.4 Основные виды алгоритмов функционирования.....	16
1.5 Алгоритмы управления. Основные законы управления.....	17
1.5.1 Пропорциональный закон (П-регулирование).....	17
1.5.2 Интегральный закон (И-регулирование).....	18
1.5.3 Пропорционально-интегральный закон (ПИ-регулирование).....	18
1.5.4 Пропорционально-дифференциальный закон (ПД-регулирование)....	19
1.5.5 Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон (ПИД-регулирование).....	19
1.5.6 Позиционное регулирование (релейное).....	19
1.6 Виды систем автоматического регулирования.....	19
1.6.1 Стабилизирующие, программные, следящие АС.....	20
1.6.2 Автоматические системы прямого и непрямого регулирования.....	21
1.6.3 Статические и астатические системы регулирования.....	22
1.6.4 Линейные и нелинейные системы.....	23
1.6.5 Непрерывные и дискретные АС.....	24
2 Математическое описание элементов и систем управления.....	26
2.1 Линеаризация уравнений звена.....	29
2.2 Принцип суперпозиции.....	33
2.3 Передаточная функция звена.....	33
2.4 Передаточные функции типовых (элементарных) звеньев.....	36
2.4.1 Позиционные звенья.....	36
2.4.2 Интегрирующие звенья.....	38
2.4.3 Дифференцирующие звенья.....	39
2.5 Соединения звеньев и передаточные функции этих соединений.....	41
2.5.1 Последовательное соединение.....	41
2.5.2 Параллельное соединение.....	42
2.5.3 Звенья с обратными связями.....	42
2.5.4 Смешанное соединение звеньев.....	43
2.6 Структурные преобразования систем.....	44
2.7 Передаточные функции и дифференциальные уравнения замкнутых АС...	44
2.8 Частотные характеристики.....	56
2.9 Воздействие периодических процессов на звено.....	60
2.10 Переходные характеристики звена.....	61
2.10.1 Типовые входные воздействия.....	61
2.10.2 Переходные характеристики.....	65
2.11 Определение реакции звена (системы) на входное воздействие с помощью переходных характеристик.....	67

3 Устойчивость линейных автоматических систем.....	68
3.1 Понятие устойчивости линейных АСУ.....	68
3.2 Критерий устойчивости Гурвица.....	72
3.3 Критерий устойчивости Михайлова.....	73
3.4 Определение границ устойчивости.....	76
3.5 Критерий устойчивости Найквиста.....	80
3.5.1 Общая формулировка критерия Найквиста.....	82
3.5.2 Частная формулировка Найквиста.....	82
3.5.3 Особые случаи применения критерия Найквиста.....	84
3.5.4 Использование АФЧХ.....	84
4 Оценка качества переходного процесса (процессов управления).....	85
4.1 Требования к качеству процесса управления. Показатели качества.....	85
4.2 Критерии качества.....	87
4.3 Точность при типовых воздействиях.....	89
4.3.1 Постоянное ступенчатое воздействие.....	90
4.3.2 Воздействие, изменяющиеся с постоянной скоростью.....	91
4.3.3 Воздействие изменяется с постоянным ускорением.....	92
4.3.4 Гармоническое (синусоидальное) воздействие.....	92
4.4 Точность при медленно произвольно меняющихся воздействиях. Коэффициенты ошибок.....	94
4.5 Определение запаса устойчивости и быстродействия по кривой переходного процесса.....	95
4.6 Приближенная оценка качества переходного процесса по частотным характеристикам.....	97
4.6.1 Приближенная оценка переходного процесса по вещественной частотной характеристике.....	99
4.6.2 Определение запаса устойчивости и быстродействия по частотным характеристикам.....	100
4.7 Определение запаса устойчивости и быстродействия по расположению корней характеристического уравнения.....	103
4.8 Интегральные оценки качества.....	107
4.9 Чувствительность систем регулирования.....	109
4.9.1 Функции чувствительности временных характеристик.....	110
4.9.2 Функции чувствительности частотных критериев качества.....	112
5 Корректирующие устройства и методы их синтеза.....	113
5.1 Эквивалентность корректирующих устройств.....	113
5.2 Последовательные корректирующие устройства.....	114
5.3 Параллельные корректирующие устройства.....	119
5.4 Корректирующие устройства по внешнему воздействию.....	125
5.4.1 Корректирующее устройство по задающему воздействию.....	125
5.4.2 Корректирующие устройства по возмущению.....	128
5.5 Неединичные главные обратные связи.....	129

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

за навчальним курсом
“Теорія автоматичного керування”

Укладачі: доц. А.Д. Коломитцев
доц. Л.В. Чернікова

Підписано к печати 08.12.2003. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. 8,38. Печать лазерная. Заказ № 4002. Тираж 300 экз.

**Отпечатано в типографии ООО «Норд Компьютер»
на цифровых лазерных издательских комплексах
Rank Xerox DocuTech 135 и DocuColor 2060.**

Адрес: г. Донецк, б. Пушкина, 23. Телефон: (062) 337-43-06.